数学精品库

SHUXUE JINGPIN KU

数学竞赛题的背景

SHUXUE JINGSAI TI DE BEIJING

民主与建设出版社

作者介绍

王志雄，1945年8月生于福建泉州。1968年北京大学数学力学系本科毕业，1981年厦门大学数学系研究生毕业，获理学硕士学位。现任国立华侨大学管理信息科学系教授，兼任中国数学奥林匹克高级教练、福建省组合数学委员会副主任、中国民主建国会福建省委会委员、泉州市委会副主委等学术、社会职务多项。在国内外发表学术论文30余篇，曾获福建省应用数学委员会优秀论文奖。5篇论文被美国、德国出版的国际性刊物评论、摘录。出版著作《数学奥林匹克36计》、译作《数论的三颗明珠》等6本，百余万字。参加与主持四项国家及福建省自然科学基金会的研究项目。名列国际数学联盟编辑的《世界数学家名录》，传记收入《中国当代自然科学人物总传》等多本辞书。

汪启泰，1945年9月生于福建泉州。1967年毕业于福建师范大学数学系。现在泉州三中任教数学课程，中学高级教师。兼任泉州市鲤城区数学会理事。发表论文《一类根式函数的值域》、《调整法与最值》等多篇。

前　　言

数学竞赛，为了保证其公正性、客观性，要求试题有新意。使用成题为命题之一大忌。因而，随着竞赛活动的蓬勃开展，命题的积极性得到了很大的调动，初数研究的潜力受到了很大的激发。

然而，命题不是命题者闭门造车、冥思苦想的结果。试题，无论命题者如何独具匠心，表现出不同程度的创造性，都是由来有自，有其深刻的背景。

数学是一个有机联系的整体。有人认为"奥林匹克数学"越来越独立，既不同于初等数学，也不同于高等数学。但是，我们不能不感到，"奥林匹克数学"与初等数学、高等数学的关系越来越密切，它以高等数学思想为灵魂，以初等数学知识为载体，使三者成水乳交融的和谐状态。

实际上，当代的任何数学都不可能是无本之木、无源之水。

数学大师对数学有不朽的建树，凭借的是他们有独到的数学思想方法。这些思想方法，在初等数学知识能够承受的前提下，或隐或显地大量地渗透到竞赛中。综观一百年来大量的竞赛试题，不难发现这一点。

本书通过归类整理，揭示一些试题的背景，展现它们的思想渊源，提供给读者一个与大师们进行"思想交流"的机会。在使读者的"奥林匹克数学"水平再提高一个层次方面，但愿它

能起到一块垫脚石的作用。本书还介绍了不少与竞赛题有关的，至今尚未获解决的数学问题。有兴趣的读者可就这些问题一试身手，“欲与大师试比高”。

“一个人如果要在数学上有所进步，他必须向大师们学习，而不应向徒弟们学习。”〔阿贝尔（Abel，1802－1829）语〕

目　录

一 法兰西皇帝拿破仑“返魂”命题

【试题】

题 1 在任意给定的三角形的每边上向外作顶角为 120° 的等腰三角形，构成一个六边形。证明：连结这些等腰三角形中不属于原三角形顶点的顶点，成一等边三角形。

（美国，1956）

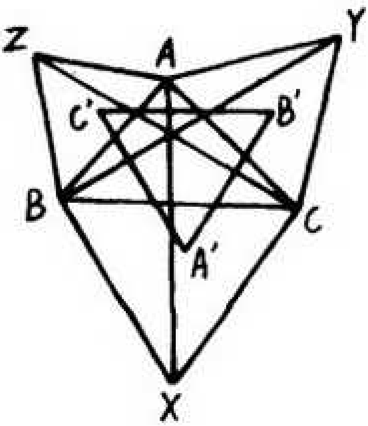
题 2 如（图 1），设 A'、B'、C' 分别是正三角形 XBC、YCA、ZAB 的重心，求证：

(1) $AX = BY = CZ$，

(2) $B'C' = \frac{1}{\sqrt{3}}AX$，

(3) $\triangle A'B'C'$ 为正三角形。

（南京，1978）



（图 1）

题 3 给定一个圆周，要求只用圆规（不许用直尺），把这圆周四等分。 （上海，1956）

【背景】

题 1 与题 2 的实质是一样的。题 2 中的正 $\triangle A'B'C'$ 称为外拿破仑(Napoleon, Bonaparte, 1769 — 1821)三角形。

若从任意三角形 ABC 向内作正 $\triangle X'BC$、$Y'CA$ 与 $Z'AB$，这三个三角形的重心分别记为 A''、B''、C''，则 $\triangle A''B''C''$ 也是正三角形，称为内拿破仑三角形。

拿破仑三角形有不少趣味的性质，见本丛书的《数学宫趣游》与《平面几何思维训练》。

题 3 是拿破仑提出，向法国数学家征解的问题。解法见本丛书《数学宫趣游》。

二 数字魅力　竞赛趣题

【试题】

题4　试证数列

49,4489,444889,44448889,…

中每一个数都是完全平方数。　　　　　　　　　　（莫斯科,1964）

题5　证明 $N=\underbrace{11\cdots1}_{n个}\underbrace{22\cdots2}_{n+1个}$ 是完全平方数,并求 $\sqrt{N}$。

（苏联,奥尔德尼基茨市,3届）

题6　$P=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n个}-\underbrace{22\cdots2}_{n个}}$（$n$ 为自然数）,则

(A)P 为无理数,(B)$P=11\cdots1$,(C)$P=22\cdots2$,

(D)$P=33\cdots3$,(E)$P=77\cdots7$

答:〔　　〕（重庆,1983,初中）

题7　若数字 $x(x\neq0)$ 和 y,对任意的自然数 n,都使

$$\underbrace{x\cdots x}_{n个}6\underbrace{y\cdots y}_{n个}4$$

是一个完全平方数,求所有的 x 和 y。　　　　　　（全苏,8届）

题8　求所有这样的三位数,它等于它的数码的阶乘之和。　　　　　　　　　　　　　　　　　　（莫斯科,1940）

【背景】

题 4 至题 7 的原型是：求数字 a, b, x, y，使数列

$$\overline{ab},\overline{xayb},\overline{xxayyb},\cdots \tag{1}$$

中的每一项都是完全平方数。

定理：当且仅当存在整数 r、t，使得

$$9(10a+b)=(10r+t)^2$$

$$x=r^2$$

$$y=\frac{1}{10}(9b-t^2)$$

时，数列(1) 中每项均为完全平方数。

这样，类似这组题的例有：

$1\cdots102\cdots24=3\cdots32^2$

$1\cdots108\cdots89=3\cdots33^2$ （题 6）

$1\cdots115\cdots56=3\cdots34^2$

$1\cdots122\cdots25=3\cdots35^2$ （题 5）

$4\cdots422\cdots25=6\cdots65^2$

$4\cdots435\cdots56=6\cdots66^2$

$4\cdots448\cdots89=6\cdots67^2$ （题 4）

$4\cdots462\cdots24=6\cdots68^2$ （题 7）

$9\cdots940\cdots09=9\cdots97^2$

$9\cdots960\cdots04=9\cdots98^2$ （题 7）

$\underbrace{9\cdots9}_{n\text{个}}8\underbrace{0\cdots0}_{n\text{个}}1=\underbrace{9\cdots9}_{n\text{个}}9^2$

题 8 源于这样的问题：求自然数 n，使得它等于它的数码的阶乘之和。

显然，若 n 是一位数，则 $n=1$ 或 2，即 $1!=1$，$2!=2$。

n 不能是两位数。

题 8 是考虑 n 为三位数的情况。存在唯一的 $n = 145$.即 $145 = 1! + 4! + 5!$。

可以证明 n 不能是四位数。

1964 年，中学生杜格赫蒂（R. S. Dougherty）发现一个这样的五位数：$40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$。

有没有其他的自然数 n?这是一个尚未解决的问题.

古希腊哲学家、数学家普洛克拉斯（Proclus，410 - 485）说："哪里有数，哪里就有美。"

数字的无穷魅力，能不断地使竞赛题对她倾心钟情。现举几例供参考：

(1) 考虑$\overline{ab\cdots l} = a^n + b^n + \cdots + l^n$，我们有：

$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$， $370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$，

$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$， $407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$，

$1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$，$8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$，

…

$$4679307774 = 4^{10} + 6^{10} + 7^{10} + 9^{10} + 3^{10} + 0^{10} + 7^{10} + 7^{10} + 7^{10} + 4^{10}。$$

(2) 考虑$\overline{ab\cdots l} = (a + b + \cdots + l)^n$，我们有：

$512 = (5 + 1 + 2)^3$， $4913 = (4 + 9 + 1 + 3)^3$，…

$19683 = (1 + 9 + 6 + 8 + 3)^3$，

$17210368 = (1 + 7 + 2 + 1 + 0 + 3 + 6 + 8)^5$，

$34012224 = (3 + 4 + 0 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4)^6$，

$$612220032 = (6 + 1 + 2 + 2 + 2 + 0 + 0 + 3 + 2)^7，\cdots$$

三 等式名不见经传
作试题源源不断

【试题】

题 9 计算 $\sqrt{31 \times 30 \times 29 \times 28 + 1}$

（美国，1989，邀请赛）

题 10 已知 $P = \sqrt{1988 \times 1989 \times 1990 \times 1991 + 1} - 1989^2$，那么 P 的值是（ ）

(A) 1987　　(B) 1988　　(C) 1989　　(D) 1990

（第一届希望杯，全国联赛初二）

题 11 计算 $\sqrt{1991 \times 1992 \times 1993 \times 1994 + 1} - 1992^2$

（天津，1991，初二）

题 12 试证：任意四个连续自然数的乘积与 1 的和的算术平方根是一个自然数。（上海，1962）

题 13 求证：四个连续的自然数之乘积不能表示成整数平方的形式。（匈牙利，1923）

题 14 设 $a + b + c = abc$，求证：

$$a(1-b^2)(1-c^2) + b(1-a^2)(1-c^2) + c(1-a^2)(1-b^2) = 4abc \quad (1)$$

（武汉，1957，1978）

题 15　已知$\triangle ABC$的三内角的正切$\mathrm{tg}A,\mathrm{tg}B,\mathrm{tg}C$满足：(1)$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=-\frac{1}{6}$，(2)$\mathrm{tg}^3A+\mathrm{tg}^3B+\mathrm{tg}^3C=-\frac{181}{216}$，求$A$、$B$、$C$。　　（上海，1983）

题 16　设$\sin A+\sin B+\sin C=\cos A+\cos B+\cos C$，求证：$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=3\cos(A+B+C)$

$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=3\sin(A+B+C)$

（武汉，1958）

题 17　设x、y、$z\in Q$，$t^3=2$，$x+yt+zt^2\neq 0$，求证：存在u、v、$\omega\in Q$，使得

$(x+yt+zt^2)(u+vt+\omega t^2)=1$

（伊比利亚美洲，3 届）

题 18　求证：任何整数都可以表示成五个整数的立方和的形式。　　（苏联，1977，大学生）

题 19　求证：存在无穷多个整数，它们不能写成三个整数的立方和的形式。　　（莫斯科，1959）

【背景】

题 9 至 13 源自恒等式：

$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$。

题 14，15 源自下述定理：

若α,β,γ均非$\frac{\pi}{2}$的奇数倍，当且仅当$\alpha+\beta+\gamma$为π的整数倍时，等式

$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma$成立。

题 16,17 源自恒等式：

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=(a+b+c)\cdot\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}\end{aligned}\tag{2}$$

题 18 源自等式

$$6x=(x+1)^3+(x-1)^3-x^3-x^3\tag{3}$$

【解答】

(9) 869

(10) 13

(11) 1991

(13) a 为自然数，则

$$\begin{aligned}(a^2+3a)^2&<a(a+1)(a+2)(a+3)\\&<(a^2+3a+1)^2\end{aligned}$$

(14) 令 $a=\mathrm{tg}\alpha,b=\mathrm{tg}\beta,c=\mathrm{tg}\gamma$，则 $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$(k 为整数)，式(1) 等价于

$$\mathrm{tg}2\alpha+\mathrm{tg}2\beta+\mathrm{tg}2\gamma=\mathrm{tg}2\alpha\cdot\mathrm{tg}2\beta\cdot\mathrm{tg}2\gamma$$

(15) 由背景所述定理得 $\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{tg}C=-\frac{1}{6}$，式(2) 中取 $a=\mathrm{tg}A,b=\mathrm{tg}B,c=\mathrm{tg}C$ 得

$\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{tg}C+\mathrm{tg}C\cdot\mathrm{tg}A=-\frac{2}{3}$，故 $\mathrm{tg}A$、$\mathrm{tg}B$、$\mathrm{tg}C$ 为方程 $x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}=0$，即 $(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})=0$ 的根，从而 A、B、C 分别为 $\frac{3\pi}{4}$，$\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}$，$\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}$。

(16) 式(2)中，分别取 $a=\cos A+i\sin A, b=\cos B+i\sin B, c=\cos C+i\sin C$。

(17) 式(2)中取 $a=x, b=yt, c=zt^2$，因 $t\overline{\in}Q$，故 $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=(x^2-2yz)+(2z-xy)t+(y^2-xz)t^2\neq 0$，从而 $r=a^3+b^3+c^3-3abc$ 是非零有理数，取 $u=\frac{x^2-2yz}{2r}, v=\frac{2z-xy}{2r}, \omega=\frac{y^2-xz}{2r}$，得证。

(18) 因对一切整数 n，$\frac{n^3-n}{6}$ 是整数，式(3)中取 $x=\frac{n^3-n}{6}$，得

$$n=n^3+x^3+x^3+(-x-1)^3+(1-x)^3。$$

(19) 对任何整数 x，$x^3\equiv 0, +1$ 或 $-1 \pmod 9$，故对任何三个整数 x, y, z，

$x^3+y^3+z^3\equiv 0, +1, +2, +3, -1, -2$ 或 $-3 \pmod 9$。从而，形为 $9k\pm 4$（k 为整数）的整数不能表示为三个整数的立方和。

注：由题 18、19，自然地要问：是否每个整数都能表示为四个整数的立方和?这是一个尚未解决的著名问题。

四 等式名垂青史
试题不乏新意

【试题】

题 20　设 a、b、c、d 都是整数，且 $m = a^2 + b^2$，$n = c^2 + d^2$，则 mn 也可表示成两个整数的平方和，其形式是：$mn =$ ________。　　　　（全国初中联赛，1986）

题 21　每一个具有形式 $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2$ 的式子可以用至少两种不同的方式表示为两个平方的和，并求满足

$$x^2 + y^2 = 44^2 \times 10^2 + 10^2 \times 33^2 + 33^2 \times 5^2 + 5^2 \times 44^2$$

与 $x > y$ 的两种可能的有序正整数对 (x, y) 中的任何一对。

（纽约，1977）

题 22　设 a、b、x、y 都是实数，并且 $a^2 + b^2 = 1$，$x^2 + y^2 = 1$。求证：$|ax + by| \leqslant 1$。　　　　（成都，1963）

题 23　求证：方程 $x^2 + y^2 = z^5 + z$ 有无数多组正整数解 x、y、z，使 $(x, y, z) = 1$。　　　　（英国，1985）

题 24　设 N_0 是非负整数集合，f 是 $N_0 \to N_0$ 的函数，满足 $f(1) > 0$，及对任何的 m、$n \in N_0$，有 $f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n)$。证明：$f(n) = n (n \in N_0)$。（国家集训队试题，1995）

题 25　设 k 是正整数，$m = 2^k + 1$，r 是 $z^m - 1 = 0$ 的非

实数复根，则存在整系数多项式 $P(r)$，$Q(r)$，使得 $P^2(r)+Q^2(r)=-1$。

（普特南，44 届）

题 26 证明：存在无限多个自然数 a，有下列性质：对任何自然数 n，$z=n^4+a$ 都不是素数。

（IMO，11 届；捷克，1973）

题 27 求

$$\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$$

（美国，1987，邀请赛）

题 28 式

$$\frac{(2^4+\frac{1}{4})(4^4+\frac{1}{4})(6^4+\frac{1}{4})(8^4+\frac{1}{4})(10^4+\frac{1}{4})}{(1^4+\frac{1}{4})(3^4+\frac{1}{4})(5^4+\frac{1}{4})(7^4+\frac{1}{4})(9^4+\frac{1}{4})}$$ 所

表示的数是一个正整数，这个正整数是________。

（江苏，1991）

题 29 n 为正整数，求和式

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]+\cdots$$

的值。

（IMO，10 届）

题 30 设 $x_{(n)}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$，$(n=1,2,\cdots)$，$x_{(0)}=1$。求证：对一切实数 x、y，都有

$$(x+y)_{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x_{(k)}y_{(n-k)}$$

（普特南，23 届）

题 31 已知 $x=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+$

$\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$，求 x^3+ax+b 的值。（安徽，1977）

题 32 设 $x \geqslant \frac{1}{8}$，求证：$\sqrt[3]{x+\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}+\sqrt[3]{x-\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}=1$。（杭州，4 届，初中）

【背景】

题 20 至 25 均与著名的菲波那契（Fibonacci，1170－1250）恒等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac \pm bd)^2+(ad \mp bc)^2 \quad (1)$$

有密切联系。

题 26 至 28 则源自下述两个本质相同的定理：

哥德巴赫（Goldbach，**1690－1764**）**定理**：对一切整数 $n>1$，$4n^4+1$ 均是合数。

吉梅茵（Germain，**1776－1831**）**定理**：对一切整数 $n>1$，n^4+4 均是合数。

实际上，利用恒等式：

$$x^4+4y^4 = (x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2) \quad (2)$$

即可证明上述两个定理。

题 29 是**赫密特**（Hermite，**1822－1901**）**恒等式**

$$[x]+[x+\frac{1}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-1}{n}]=[nx] \quad (3)$$

的直接应用。

题 30 所求证的等式称为若兰(Nörlund) 恒等式。

令 $x^{(n)} = x(x+1)\cdots(x+n-1) \quad (n=1,2,\cdots)$，$x^{(0)} = 1$。则对一切实数 x，y，都有

$$(x+y)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{(k)} y^{(n-k)} \tag{4}$$

式(4)称为范德蒙(Vandermonde，1735－1796)恒等式。

这两个恒等式在形式上与著名的牛顿(I. Newton，1642－1727)二项展开式相似：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

题 31 与 32 源自三次方程 $x^3 + ax + b = 0$ 的塔尔塔利亚(Tartaglia，1506－1557)的求根公式：

$x_1 = u + v$， $x_2 = u\varepsilon + v\varepsilon^2$， $x_3 = u\varepsilon^2 + v\varepsilon$，

其中 $u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$，$v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$，

$\varepsilon = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$.

【解答】

(20) 见式(1)。

(21) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$，

(605，110) 或(550，275)

(22) $(ax + by)^2 \leqslant (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

$= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = 1$

(23) 取 $z = a^2 + b^2$，则

$z^5 + z = (z^4 + 1)(a^2 + b^2)$

$$= (ax^2 + b)^2 + (bx^2 - a)^2$$

故 $x = a(a^2 + b^2)^2 + b, y = b(a^2 + b^2)^2 - a, z = a^2 + b^2$ 是给定方程的解，当 $(a,b) = 1$ 时，$(x,y,z) = 1$。

(24) 对 $n \leqslant 10$，直接验证。当 $n > 10$ 时，借助恒等式

$$\begin{aligned}5(k^2 + 1) &= (2k + 1)^2 + (k - 2)^2 \\ &= (2k - 1)^2 + (k + 2)^2 \\ 5(k^2 + 4) &= (2k + 2)^2 + (k - 4)^2 \\ &= (2k - 2)^2 + (k + 4)^2\end{aligned}$$

并利用数学归纳法证明。

(25) 因 $r^m - 1 = 0, r \neq 1$，故 $1 + r + r^2 + \cdots + r^{m-1} = 0$，即 $r(1 + r + \cdots + r^{m-2}) = -1$，又

$$\begin{aligned}&1 + r + r^2 + \cdots + r^{m-2} \\ &= (1 + r)(1 + r^2)(1 + r^4)\cdots(1 + r^{2^{k-1}}) \\ &r(1 + r) = r + r^2 = r^{m+1} + r^2\end{aligned}$$

故 $$(r^{m+1} + r^2)(1 + r^2)(1 + r^4)\cdots(1 + r^{2^{k-1}}) = -1 \quad (5)$$

式(5)左边每一因式都是平方和的形式，依次利用式(1)必可表示成 r 的两个整系数多项式之平方和。

(26) 取 $a = 4t^4 (t > 1)$

(27) 373

(28) 1997

(29) 利用式(3)(取 $n = 2$)，得

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n}{2^k}\right] - \left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]$$

故所求值为

$$[n] - \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] + \cdots = n.$$

(30) 利用数学归纳法。

(31) 0

(32) $t=\sqrt[3]{x+\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}+\sqrt[3]{x-\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}$
为方程 $t^3+(2x-1)t-2x=0$ 即 $(t-1)(t^2+t+2x)=0$ 的实根，故 $t=1$。

五 代数历史名胜景观

【试题】

题 33 （图 2）中，x 需取何值时，才能使它成为一个幻方？

（A）3 （B）5 （C）6 （D）7 （E）无法确定

题 34 （图 3）中，x 需取何值时，才能使它成为一个幻方？

（A）4 （B）7 （C）9 （D）22 （E）无法确定

（马来西亚，1989）

	12		x
15		4	14
3	13		
		5	11

（图 2）

20		x		13
9			25	
23			14	16
12	19		3	10
	8	15		24

（图 3）

注：所谓幻方是：把 $1,2,3,\cdots,n^2$ 这 n^2 个自然数排成 n 行、n 列，使得每行、每列及两条对角线上的数之和都相等的数阵。

题 35 求证：如果 n 是偶数，则 $1,2,\cdots,n^2$ 能够排成这样

的 $n \times n$ 方阵，使得方阵中每一列里的所有数之和相等。

（莫斯科，1961）

题 36 在 3×3 的正方形表格中，填上九个不同的自然数，使每行三数相乘，每列三数相乘，所得六个乘积彼此相等（我们用 p 表示这个乘积）。

(1) 证明：这种填数法是可以实现的。

(2) 试证明 p 能取 1990，1991，1992，1993，1994，1995 这六个数中的哪些数？

(3) 求 p 的最小值，并说明理由。

（北京，1991）

题 37 任给五个整数，证明必能从其中选出三个，使得它们的和能被 3 除尽。

（安徽，1978；加拿大，1970）

题 38 k 是自然数，$n = 2^{k-1}$。求证：从 $2n - 1$ 个自然数中，总可选出 n 个数，使其和能被 n 整除。（西德，1981）

题 39 设有两个正的分数 $\frac{p_1}{q_1}$、$\frac{p_2}{q_2}$ 介于 A、B 两数之间，p_1、p_2、q_1、q_2 都大于零。证明：分数 $\frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}$ 也介于 A、B 两数之间。

（陕西，1978）

题 40 证明：没有正整数 a、b、c、d，使得 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

（新加坡，1986）

题 41 证明：如果 $a > b > 0$，并且 $\frac{x}{a} < \frac{y}{b}$，则有 $\frac{1}{2}(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) > \frac{x+y}{a+b}$。（莫斯科，1987）

题 42 设 a、b、c、d、p、q 是正整数，$ad-bc=1$，$\frac{a}{b}>\frac{p}{q}>\frac{c}{d}$。求证：

(1) $q\geqslant b+d$，

(2) 若 $q=b+d$，则 $p=a+c$。

（伊比利亚美洲，第 3 届数学竞赛）

题 43 证明：对于任意的正整数 n 来说，都有 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$ （莫斯科，1945）

题 44 设 n 是大于 1 的正整数，试证：

$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1$ （成都，1964）

题 45 求证：任何一个正的既约分数 m/n，都可以表示成两两相异的自然数的倒数之和。

（波兰，1972；普特南，14 届）

题 46 求证：(1) 对一切正整数 n，存在 n 次整系数多项式 $P_n(x)$，使得对一切 $t\in R$，都有 $P_n(2\cos t)=2\cos nt$。

(2) 若 $\alpha\in Q$，则 $\cos\alpha$ 等于 0，$\pm\frac{1}{2}$，± 1 或无理数。

（英国，1978）

题 47 考虑首项系数为 1 的一个变量 x 的多项式，称两个这样的多项式 P 与 Q 是可交换的，如果多项式 $P(Q(x))$ 与 $Q(P(x))$ 恒等。

求证：存在无限个多项式 $P_2,P_3,\cdots,P_k,\cdots$，使得 P_k 是 k 次多项式，且任两个多项式是可交换的。 （全苏，11 届）

题 48 设 $P_1(x)=x^2-2$，$P_i(x)=P_1[P_{i-1}(x)]$，$(i=$

2,3,4,…)。

求证：对任一正整数 n，方程 $P_n(x)=x$ 的根是互不相同的实数。　　　　（IMO，18 届）

题 49　实系数多项式 $P(x)=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$，当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，恒有 $0\leqslant P(x)\leqslant 1$，求 A 的最大值。

（普特南，39 届）

题 50　设 a、b、c 是实数，且对一切 $x\in[-1,1]$ 恒有 $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$。

求证：对一切 $x\in[-1,1]$，恒有 $|2ax+b|\leqslant 4$

（匈牙利，1914）

题 51　Q 上的实值函数 f 对所有 α、$\beta\in Q$ 满足下列条件：

(1) $f(0)=0$，

(2) 若 $\alpha\neq 0$，则 $f(\alpha)>0$，

(3) $f(\alpha\beta)=f(\alpha)\cdot f(\beta)$，

(4) $f(\alpha+\beta)\leqslant f(\alpha)+f(\beta)$，

(5) 对所有 $m\in Z$，$f(m)\leqslant 1989$。

求证：若 $f(\alpha)\neq f(\beta)$，则 $f(\alpha+\beta)=\max\{f(\alpha),f(\beta)\}$（$Z$ 为整数集，Q 为有理数集）　　（IMO 备选题，30 届）

题 52　映射 $f:Q\to R$ 满足条件：

(1) 对任意非零的 $\alpha\in Q$，$f(\alpha)>0$，而 $f(0)=0$，

(2) $f(\alpha\beta)=f(\alpha)f(\beta)$，

(3) $f(\alpha+\beta)\leqslant\max\{f(\alpha),f(\beta)\}$。

设 x 为整数，$f(x)\neq 1$。求证：对于任何正整数 n，$f(1+x+x^2+\cdots+x^n)=1$。此处，Q 为全体有理数的集合，R 为全体实数的集合。　　（IMO 备选题，31 届）

题 53　求证：方程$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x-a}=0(a>0,b>0)$有两个实数根，且一个在$(\frac{a}{3},\frac{2a}{3})$中，另一个在$(-\frac{2b}{3},-\frac{b}{3})$中。

（匈牙利，1916）

题 54　设$a<0$，则方程$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+a^2}=0$有两个异号实根，且正根必小于$-\frac{2}{3}a$，负根必大于$-\frac{2}{3}a^2$。

（北京，1984，初中）

题 55　一次有 41 个学生参加的代数、生物、化学三门科目的考试中，一科、两科和三科考试不及格的学生人数如下表表示：

科　　目	代	生	化	代、生	代、化	生、化	代、生、化
不及格者	12	5	8	2	6	3	1

问：三门考试科目都及格的学生有多少人？（美国，1964）

题 56　某校先后举行数、理、化三科竞赛，学生中至少参加一科的，数学 807 人，物理 739 人，化学 427 人；至少参加两科的，数学、物理 593 人，数学、化学 371 人，物理、化学 267 人；三科都参加的有 213 人。试计算参加竞赛的学生总数。

（福建，1978）

题 57　某中学图书馆有中、外文科技和文艺书刊共 1000 种。据说其中有 810 种中文书，312 种文艺书，370 种精装本，247 种中文精装本，100 种中文文艺书，186 种精装文艺书，85

种中文精装文艺书。试说明这些数字与实际是否相符。

（山西，1978）

题 58 某大学有外语教师 120 名，其中教英语的有 50 名，教日语的有 45 名，教法语的有 40 名，有 15 名既教英语又教日语，有 10 名既教英语又教法语，有 8 名既教日语又教法语，有 4 名教英语、日语和法语这三门课。则不教这三门外语课的教师有________。

(A) 10 名　(B) 14 名　(C) 18 名　(D) 22 名

(E) 26 名　　（上海，1984）

题 59 在小于 1000 的正整数中，既不能被 5 整除，也不能被 7 整除的数有多少个？　　（莫斯科，4 届）

题 60 从 1 到 46 的整数中，能被 3 或 5 整除的数共（　　）个。

(A) 18　(B) 21　(C) 24　(D) 25　(E) 27

（美国，七届，初中）

题 61 设 $n=6^{1991}$，则 $1,2,3,\cdots,n$ 中与 n 互素的整数共有________个。　　（五羊杯，三届，初三）

题 62 从 1 到 1992 的自然数中，是 3 的倍数，但不是 2 或 5 的倍数的数的个数是（　　）。

(A) 664　(B) 465　(C) 266　(D) 200（缙云杯，九届）

题 63 已知方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0,\end{cases}$$

的系数满足下列条件：

(1) a_{11},a_{22},a_{33} 都是正数，

(2) 所有其余的系数都是负数，

(3) 每一方程中系数之和都是正数。

求证：$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 是这个方程组的唯一解。

(IMO，7届)

题 64 设 $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$，这里 $2^p - 1$ 是素数。求证：数 n 的所有不等于 n 的正约数之和恰等于 n。(匈牙利，1922)

题 65 求证：如果 n 是奇的正整数，则 $2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ 在十进制中的最后两位数是 28。 (荷兰、瑞典，1983)

题 66 设 p 和 q 是两个奇数，求证：方程 $x^2 + 2px + 2q = 0$ 不可能有有理数根。 (匈牙利，1904)

题 67 求证：四次多项式 $x^4 + 2x^2 + 2x + 2$ 不可能分解成两个具有整系数 a、b、c、d 的多项式 $x^2 + ax + b$ 和 $x^2 + cx + d$ 的积。 (匈牙利，1922)

题 68 求证：五次多项式 $p(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ 不能分解成两个次数低于5的整系数多项式之积的形式。 (波兰，1962)

题 69 求 $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (x-k)^n$ 的值。(普特南，37届)

题 70 求方程 $p^r - q^s = 1$ 的整数解，其中 p、q 是素数，r、s 是大于1的正整数，并证明你所得到的解是全部解。

(普特南，37届)

题 71 求方程 $x^r - 1 = p^n$ 的满足下述两条件的所有自然数组解 (x, r, p, n)：

(1) p 是素数；

(2) $r \geqslant 2, n \geqslant 2$。 (国家集训队试题，1994)

【背景】

题 33 — 35 为幻方问题。题 36 是考虑有其它"奇幻"性质的方阵问题。详见本丛书《数学宫趣游》。

题 37 — 38 是下述定理之特殊情况:

柯召 - 孙琦 - 单墫定理 任给 $2n-1$ 个整数，必可从中选出 n 个数，使其和能被 n 整除。

这个定理是我国著名数学家柯召、孙琦 70 年代末猜想，单墫、高维东证明的。

题 39 — 42 与如下定理有关:

丘凯(N. Chuquet，1445 — 1500)定理 设 $a、b、c、d>0$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$，则 $\frac{a}{c}<\frac{a+b}{c+d}<\frac{b}{d}$。

由丘凯定理，我们可得到如下的推广:

设 $a、b、c、d>0$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$，$m，n$ 为正整数，则 $\frac{a}{c}<\frac{ma+nb}{mc+nd}<\frac{b}{d}$。

证明:$\because m、n、a、b、c、d>0$，$\therefore ma、mc、nb、nd>0$，又 $\because \frac{a}{c}<\frac{b}{d}$ $\therefore \frac{ma}{mc}<\frac{nb}{nc}$，故由丘凯定理得 $\frac{ma}{mc}<\frac{ma+nb}{mc+nd}<\frac{nb}{nd}$ 即 $\frac{a}{c}<\frac{ma+nb}{mc+nd}<\frac{b}{d}$。

广义丘凯定理的逆命题也成立。

设 $a、b、c、d、e、f$ 是正整数，$\frac{a}{c}<\frac{e}{f}<\frac{b}{d}$，$bc-ad=1$，则存在正整数 $m、n$，使得 $e=ma+nb$，$f=mc+nd$。

证明:因 $bc-ad=1$，故解方程组 $\begin{cases}am+bn=e\\cm+dn=f\end{cases}$ 得

$$\begin{cases} m = bf - de \\ n = ce - af \end{cases}$$

因 $\frac{a}{c} < \frac{e}{f} < \frac{b}{d}$，且 a、b、c、d、e、f 都是正整数，所以 $bf - de$，$ce - af$ 都是正整数。故令 $m = bf - de$，$n = ce - af$ 则得 $e = ma + nb$，$f = mc + nd$。

借助于题 43、44 可以证明调和级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 是发散的。题 44 的不等式是詹姆斯·伯努利(James Bernoulli，1655 － 1705) 首先提出的。

题 45 即西尔维斯特(J. Sylvester，1814 － 1897) 定理。

题 46 － 49 与切比雪夫(P. Tchebycheff，1821 － 1894) 多项式有关。

设 k 为正整数，k 次切比雪夫多项式 $T_k(x)$ 定义为

$$T_k(\cos\theta) = \cos k\theta$$

因为，由狄摩佛(De Moivre，1667 － 1754) 定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$$

得

$$\cos(k\theta) = \frac{1}{2}[(\cos\theta + i\sin\theta)^k + (\cos\theta - i\sin\theta)^k]$$

由牛顿(I. Newton，1642 － 1727) 二项式展开定理，得

$$\cos k\theta = \sum_{j=0}^{[k/2]} (-1)^j C_k^{2j} \cos^{k-2j}\theta \sin^{2j}\theta$$

$$= \sum_{j=0}^{[k/2]} C_k^{2j} \cos^{k-2j}\theta (\cos^2\theta - 1)^j$$

故

$$T_k(x) = \sum_{j=0}^{[k/2]} C_k^{2j} x^{k-2j} (x^2 - 1)^j$$

零次切比雪夫多项式约定为$T_0(x)=1$。

切比雪夫多项式有如下性质：

性质 1　多项式$T_k(x)(k \geqslant 1)$的最高次项系数为2^{k-1}。

证明：若$k=2n$（n为正整数），则$T_k(x)$的最高次项系数为

$$\sum_{j=0}^{n} C_{2n}^{2j} C_j^0 = \sum_{j=0}^{n} C_{2n}^{2j} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2n} C_{2n}^{j}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2^{2n} = 2^{2n-1} = 2^{k-1}$$

若$k=2n-1$（n为正整数），则$T_k(x)$的最高次项系数为

$$\sum_{j=0}^{n-1} C_{2n-1}^{2j} C_j^0 = \sum_{j=0}^{n-1} C_{2n-1}^{2j} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2n-1} C_{2n-1}^{j}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2^{2n-1} = 2^{2n-2} = 2^{k-1}$$

性质 2　当$|x| \leqslant 1$时，$|T_k(x)| \leqslant 1$。

证明：当$|x| \leqslant 1$时，设$x=\cos\theta$，则

$$|T_k(x)| = |T_k(\cos\theta)| = |\cos k\theta| \leqslant 1$$

性质 3　设k、h为非负整数，则

$$T_k[T_h(x)] = T_h[T_k(x)] = T_{kh}(x)$$

证明：

$$\because T_k[T_h(x)] = T_k[T_h(\cos\theta)] = T_k(\cos h\theta) = \cos kh\theta$$

$$T_h[T_k(x)] = T_h[T_k(\cos\theta)] = T_h(\cos k\theta) = \cos hk\theta$$

$$T_{kh}(x) = T_{kh}(\cos\theta) = \cos kh\theta$$

$$\therefore T_k[T_h(x)] = T_h[T_k(x)] = T_{kh}(x)$$

题 50 是由著名化学家门捷列夫(D. Mendeleev，1834－1907)提出，数学家马尔可夫(Markov，1856－1922)证明的一个定理的特例：

门捷列夫-马尔可夫定理　若 n 次多项式 $P_n(x)$ 满足

$$|P_n(x)| \leqslant M \quad (-l \leqslant x \leqslant +l)$$

则

$$|P'_n(x)| \leqslant n^2M/l \quad (-l \leqslant x \leqslant +l)$$

当且仅当 $P_n(x)$ 为切比多夫多项式时，等号才能成立。

题 51、52 来自近代数学的一个重要分支 —— 赋值论。

从有理数集 Q(或实数集 R、复数集 C) 到实数集 R 的映射 f，若满足条件：

(1) 对一切 $a \in Q, f(a) \geqslant 0$；当且仅当 $a = 0$ 时，$f(a) = 0$，

(2) 对一切 $a, b \in Q, f(ab) = f(a)f(b)$，

(3) 存在常数 $C(0 < C \leqslant 2)$，使得对一切 $a, b \in Q, f(a + b) \leqslant C\max(f(a), f(b))$。

则称 f 为集合 Q 上的一个赋值。

例如取　$f(a) = |a| \quad (a \in Q, R$ 或 $C)$，则 f 是一个赋值.故赋值的概念是绝对值与模概念的推广。

若条件(3) 中的常数可取 $C = 1$，则称 f 为数集 Q 上的非阿基米德赋值。

题 51，52 中的赋值均为非阿基米德赋值.

例　给定素数 p，有理数集 Q 上的任一个非零元素 a 可唯一地表示为

$$a = p^a \cdot \frac{d}{c}$$

其中，a 是整数，c、d 都是与 p 互素的整数，且 $c > 0$，$\frac{d}{c}$ 为既约分数。令

$$f(a) = p^{-a}$$

约定

$$f(0)=0$$

则 f 是 Q 上的一个非阿基米德赋值。

事实上，条件(1)、(2) 是显然的，若

$$a=p^{\alpha}\cdot\frac{d}{c},\quad b=p^{\beta}\cdot\frac{g}{e}$$

不妨设　$\alpha\geqslant\beta$，则

$$p^{-\alpha}\leqslant p^{-\beta}\text{ 即 }f(a)\leqslant f(b)$$

当 $\alpha>\beta$ 时

$$a+b=p^{\beta}\,\frac{p^{\alpha-\beta}de+cg}{ce}$$

故

$$f(a+b)=p^{-\beta}=f(b)=\max(f(a),f(b))$$

当 $\alpha=\beta$ 时，设 $de+cg$ 能被 p^r 整除，但不能被 p^{r+1} 整除，且 $r\geqslant 0$，则

$$a+b=p^{\beta}\cdot\frac{de+cg}{ce}=p^{\beta+r}\,\frac{h}{ce}$$

故

$$f(a+b)=p^{-(\beta+r)}\leqslant p^{-\beta}=f(b)=\max(f(a),f(b))$$

又　$f(a+0)=f(a)=\max(f(a),f(0))$

故 f 满足条件(3)。

题53、54是拉格尔(Laguerre，1834－1886)定理的特例。

拉格尔定理　设 $n>1$，$a_1<a_2<\cdots<a_n$，则方程

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{1}{x-a_n}=0$$

有 $n-1$ 个实根，它们分别在区间

$$\left(a_i+\frac{a_{i+1}-a_i}{n},a_{i+1}-\frac{a_{i+1}-a_i}{n}\right)(i=1,2,\cdots,n-1)$$

中。

题 55 — 62 是著名的容斥法则（又称逐步淘汰原理，包含-排除法则，西尔维斯特定理）的直接应用。

容斥法则　考虑有限集 S 与性质 $P_1, P_2, \cdots, P_k$，具有性质 $P_i, P_j, \cdots, P_t$ 的元素个数记为 $S(i, j, \cdots, t)$，不具有任何性质的元素个数记为 S_0。

若

$$S_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq k} S(i_1, i_2, \cdots, i_r)$$

则

$$S_0 = |S| - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^k S_k$$

其中 $|S|$ 是集 S 的元素个数。

题 63 是哈达马（Hadamard，1865 — 1963）圆盘定理的特例。

哈达马定理　若方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数满足条件

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| + \cdots + |a_{in}| \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则方程组仅有唯一解　$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$。

若正整数 n 的所有不等于 n 的正约数之和恰等于 n，则称 n 为完全数。

题 64 为欧几里德（Euclid，公元前 300 年左右）定理。

欧几里德定理　若 $2^p - 1$ 是素数，则 $2^{p-1}(2^p - 1)$ 是完

全数。反之，若 n 是偶完全数，则存在正整数 p，使 2^p-1 是素数，$n=2^{p-1}(2^p-1)$。

这样，求偶完全数的问题归结为求形为 2^p-1 的素数（梅森数）。是否有无限多个梅森（Mersenne，1588－1648）数，是一个尚未解决的问题。

题 66－68 是艾森斯坦（Eisenstein，1823－1852）定理的直接应用。

艾森斯坦定理　整系数多项式 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的系数满足条件：存在素数 p，使得 a_n 不能被 p 整除，a_0 不能被 p^2 整除，$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 均能被 p 整除。则 $p(x)$ 不能分解成两个次数低于 n 的整系数多项式的积。

题 69 涉及差分的概念。函数 $f(x)$ 对一切实数 x 有定义，称函数 $f(x+1)-f(x)$ 为函数 $f(x)$ 的差分，记为 $\triangle f(x)$。函数 $\triangle f(x)$ 的差分称为 $f(x)$ 的二阶差分…… 依次下去，$f(x)$ 的 $n-1$ 阶差分的差分称为 $f(x)$ 的 n 阶差分，记为 $\triangle^n f(x)$。

定理　若 $p(x)$ 是 n 次多项式，最高次项系数为 a，则 $p(x)$ 的 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 阶差分是 $n-k$ 次多项式，最高次项系数为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)a$。特别地，$p(x)$ 的 n 阶差分是常数 $n!a$，而 $p(x)$ 的 $k(k>n)$ 阶差分为常数 0。

这个定理不难用归纳法证明。

题 70，71 与卡他兰（Catalan，1814－1894）猜测有关。卡他兰于 1842 年猜测：方程

$$x^m-y^n=1\ (x,y,m,n>1)$$

有唯一解

$$m=2,n=3,x=3,y=2$$

这一猜测至今尚未获圆满解决。

【解答】

(33) 因 $1+2+\cdots+16=136$,故四阶幻方每行、每列及两条对角线上的数之和都是 $136\div 4=34$。

a_7	12	a_6	x
15	a_1	4	14
3	13	a_5	a_4
a_3	a_2	5	11

(图4)

如(图 4),$a_1=34-(15+4+14)=1$,$a_2=8$,$a_3=10$,$x=7$,$a_4=2$,$a_5=16$,$a_6=9$,$a_7=6$。不难验证这是一幻方。故选 D。

(34) 选 $A(x=4)$

(35) 因 n 是偶数,故 n^2 个数 $1,2,\cdots,n^2$ 可分成 $\frac{n}{2}$ 组:

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & \cdots, & 2n \\ 2n+1, & 2n+2, & \cdots, & 4n \\ & \cdots\cdots & & \\ (n-2)n+1, & (n-2)n+2, & \cdots, & n^2 \end{array}$$

每组的 $2n$ 个数如下排成两行:

$$\begin{array}{cccc} 2in+1, & 2in+2, & \cdots, & 2in+n, \\ 2in+2n, & 2in+(2n-1), & \cdots, & 2in+(n+1), \end{array}$$

这样作出的方阵列和相等,即所作方阵合要求。

(36) ① 如(图 5) 是使 $p=120$ 的一种填写法。

② 显然,p 至少有 9 个不同的真约数(即小于 p 的约数)。

因 $1990=2\times 5\times 199$ 恰有 7 个真约数,

$1991=11\times 181$ 恰有 3 个真约数,

1993 是素数，即仅有 1 个真约数，

1994 = 2 × 997　　恰有 3 个真约数，

故 p 不能取 1990，1991，1993，1994。

1	8	15
6	5	4
20	3	2

（图5）

p 可能取 1992 与 1995，如图 6，7。

1	6	332
8	83	3
249	4	2

（图 6）

1	95	21
15	7	19
133	3	5

（图 7）

③ p 之最小值为 120。

（37）依被 3 除的余数 0，1，2 可把整数分为三类。任意五个整数仅有下述两种可能：

① 有一类至少含三个数；

② 没有一类含有三个数，则每一类至少含一个数。

① 取同一类中的三个数，② 每类取一数，其和都可被 3 整除。

（38）对 k 用数学归纳法证明。

（39）直接利用丘凯定理。

（40）不妨设 $0 < \frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$，则 $\frac{a+c}{b+d} \leqslant \frac{c}{d} < \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$，矛盾。

（41）因 $\frac{x}{a} < \frac{y}{b}$，$a > b > 0$，故 $ay - bx > 0$，从而

$$\frac{y}{b} - \frac{x+y}{a+b} = \frac{ay-bx}{b(a+b)} > \frac{ay-bx}{a(a+b)}$$

$$=\frac{x+y}{a+b}-\frac{x}{a}$$

（42）直接利用广义丘凯定理。

（43）$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}$

$=\frac{1}{2}$

（44）$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)+1}+$

$\cdots+\frac{1}{n^2}$

$>\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n^2}+$

$\cdots+\frac{1}{n^2}$

$=(n^2-2n-1)\cdot\frac{1}{n(n-1)}+n\cdot\frac{1}{n^2}=1$

（45）由题 43 或 44 可以证明：对于任意正整数 k，总存在一正整数 n，使得 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>k$。

设 r 是有理数，若 $r\geqslant 1$，则存在正整数 n，使得 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant r<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$，取 $r_1=r-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})$。当 $r_1=0$ 时得证，当 $r_1>0$ 时，设 $r_1=\frac{p_1}{q_1}$，则$\frac{p_1}{q_1}<\frac{1}{n+1}$，故存在正整数 $m\geqslant n+1$，使得$\frac{1}{m+1}\leqslant r_1\leqslant\frac{1}{m}$。取 $r_2=r_1-\frac{1}{m+1}$，当 $r_2=0$ 时得证。当 $r_2>0$ 时，设 $r_2=\frac{p_2}{q_2}$，因$\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{m+1}=\frac{p_1m+p_1-q_1}{q_1(m+1)}$，

而且$\frac{p_1}{q_1} < \frac{1}{m}$，即 $p_1 m - q_1 < 0$，所以 $p_2 < p_1$，故依此下去，必能在有限步之后，使 $r_k = 0$ 得证。

若 $r < 1$，如上 r_1 开始的步骤可得证。

(46) (1) 取 $P_n(x) = 2T_n(\frac{x}{2})$，则 $P_n(2\cos t) = 2T_n(\cos t) = 2\cos nt$

因 $\cos(n+1)t = 2\cos nt\cos t - \cos(n-1)t$，故

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}(2\cos t) &= 2\cos(n+1)t \\
&= 4\cos nt\cos t - 2\cos(n-1)t \\
&= 2\cos t P_n(2\cos t) - P_{n-1}(2\cos t)
\end{aligned}
$$

即 $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$

又 $P_1(x) = x, P_2(x) = x^2 - 2$.

利用数学归纳法得 $P_n(x)$ 为整系数多项式。

(2) 设 $\alpha = \frac{m}{n}, (m,n) = 1, n \geqslant 1$，则

$P_n(2\cos\alpha\pi) = 2\cos(n\alpha\pi) = 2\cos(m\pi) = \pm 2$

故 $2\cos\alpha\pi$ 为 $P_n(x) \pm 2 = 0$ 的根。$P_n(x) \pm 2 = 0$ 的最高次项系数为1，故 $P_n(x) \pm 2 = 0$ 的有理数根必为整数根，即 $2\cos\alpha\pi$ 若是有理数，则必为整数，从而 $2\cos\alpha\pi = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$。

(47) 取 $P_n(x) = 2T_n(\frac{x}{2})$，则 $P_n(x)$ 是首项系数为1的多项式，$P_2(x) = x^2 - 2$，且对任何 θ 有

$P_n(P_m(2\cos\theta)) = P_n(2\cos m\theta) = \text{os}mn\theta = P_m(P_n(2\cos\theta))$

故 $P_n(P_m(x)) = P_m(P_n(x))$

(48) 利用题 47 结果与数学归纳法可以证明：$P_n(x) =$

$2T_{2^n}(\frac{x}{2})$。

方程 $T_n(\cos\theta)=\cos\theta$，即 $\cos 2^n\theta=\cos\theta$

有根

$$\theta=\frac{2k\pi}{2^n+1}\quad (k=1,2,\cdots,2^{n-1})$$

$$\theta=\frac{2k\pi}{2^n-1}\quad (k=0,1,\cdots,2^{n-1}-1)$$

这 2^n 个 θ 的余弦值两两不同。由此可知方程

$$T_{2^n}(t)=t\quad 即\ T_{2^n}(\frac{x}{2})=\frac{x}{2}$$

有 2^n 个两两不同的实根。并由定义可知 $T_{2^n}(\frac{x}{2})=\frac{x}{2}$ 是 2^n 次代数方程，方程再也没有其他的解。

(49) 因为当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，恒有 $0\leqslant P(x)\leqslant 1$，则 $Q(x)=\frac{1}{2}(P(x)+P(-x))=Ax^4+Cx^2+D$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时恒有 $0\leqslant Q(x)\leqslant 1$，即 $R(x)=Ax^2+Cx+D$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时恒有 $0\leqslant R(x)\leqslant 1$。从而

$$T(x)=\frac{1}{2}\left(R(\frac{1+x}{2})+R(\frac{1-x}{2})\right)$$

$$=\frac{A}{4}x^4+(\frac{A}{4}+\frac{C}{2}+D)$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$0\leqslant T(x)\leqslant 1$，得 $A=4(T(1)-T(0))\leqslant 4$，取 $P(x)=\frac{1}{2}(T_4(x)+1)$，$T_4$ 为 4 次切比雪夫多项式，则 $P(x)$ 满足所给条件，且最高次项系数为 4。故 A 之最大值为 4。

(50) 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，则 $f(-1)=a-b+c$，$f(0)=c$，$f(1)=a+b+c$。故 $a=\frac{1}{2}f(1)+f(-1)-$

$f(0), b=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}f(-1)$，从而

$$\begin{aligned}|2ax+b| &= |f(1)\cdot(x+\frac{1}{2})+f(-1)\cdot(x-\frac{1}{2}) \\ &\quad -2f(0)\cdot x| \\ &\leqslant |x+\frac{1}{2}|+|x-\frac{1}{2}|+|2x|\leqslant 4。\end{aligned}$$

(51) 本题条件(5)之 1989 可用任何正整数 k 代替。不妨设 $f(\alpha)>f(\beta)\geqslant 0$，则对任何正整数 n，

$$\begin{aligned}f^n(\alpha+\beta) &= f((\alpha+\beta)^n)=f\Big(\sum_{i=0}^{n}C_n^i\alpha^{n-i}\beta^i\Big) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n}f(C_n^i\alpha^{n-i}\beta^i) \\ &\leqslant k(1+n)\cdot f^n(\alpha)\end{aligned}$$

即 $\quad f(\alpha+\beta)\leqslant \sqrt[n]{k(1+n)}\cdot f(\alpha)$

令 $n\to+\infty$，得

$$f(\alpha+\beta)\leqslant f(\alpha)=\max\{f(\alpha),f(\beta)\}$$

由条件(3)可得 $f(-1)=1, f(-\alpha)=f(\alpha)$，同理可证

$$f(\alpha)\leqslant \max\{f(\alpha+\beta),f(\beta)\}$$

从而得

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)=\max\{f(\alpha),f(\beta)\}$$

(52) 由 $f(1)=f(1)\cdot f(1), f(1)>0$ 　 得 $f(1)=1$，又 $f(1)=f(-1)\cdot f(-1), f(-1)>0$ 　得 $f(-1)=1$，从而 $f(-\alpha)=f(-1)\cdot f(\alpha)=f(\alpha)$。于是可以证明，$f(x)\leqslant 1(x\in Z)$。

故

$$f(1+x+\cdots+x^n)\leqslant \max\{f(1),f(x),\cdots,f(x^n)\}=1$$

另一方面，若 $f(x)\neq 1$，则 $f(x)<1$，

故 $f(x+x^2+\cdots+x^n)=f(x)\cdot f(1+x+\cdots+x^{n-1})$
$\leqslant f(x)<1$

$1=f(1)$

$=f\{(1+x+\cdots+x^n)+(-x-x^2-\cdots-x^n)\}$

$\leqslant \max\{f(1+x+\cdots+x^n),f(-x-x^2-\cdots-x^n)\}$

从而

$$f(1+x+\cdots+x^n)=1。$$

(53)、(54) 去分母后利用求根公式估计根的范围。

(55) 由容斥法则，三门课程及格的学生数 $=41-(12+5+8)+(2+6+3)-1=26$

(56) $(807+739+427)-(593+371+268)+213=954$

(57) 不合。因 $1000\neq(810+312+370)-(247+100+186)+85=1044$

(58) 选 B。因 $120-(50+45+40)+(15+10+8)-4=14$

(59) $999-\left(\left[\frac{999}{5}\right]+\left[\frac{999}{7}\right]\right)+\left[\frac{999}{35}\right]=686$

(60) $\left[\frac{46}{3}\right]+\left[\frac{46}{5}\right]-\left[\frac{46}{15}\right]=21$，选 B

(61) $n-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]\right)+\left[\frac{n}{6}\right]=\frac{1}{3}n=2\times 6^{1990}$

(62) $\frac{1992}{3}=664$，$664-\left(\left[\frac{664}{2}\right]+\left[\frac{664}{5}\right]\right)+\left[\frac{664}{10}\right]=266$，选 C

(63) 若方程组有解，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为 0。不妨设 x_1 是绝对值最大的一个，则 $x_1\neq 0$，得 $a_{11}|x_1|=|a_{11}x_1|=|a_{12}x_2+a_{13}x_3|\leqslant|a_{12}|\cdot|x_2|+|a_{13}|\cdot|x_3|\leqslant -a_{12}|x_1|-$

$a_{13}|x_1|$，从而 $a_{11} \leqslant -a_{12}-a_{14}$ 与条件(3)矛盾。于是得证。

(64) 数 n 不等于 n 的正约数是 $1,2,\cdots,2^{p-1},2^p-1,2(2^p-1),\cdots,2^{p-2}(2^p-1)$，计算得这些正约数之和为 $2^{p-1}(2^p-1)=n$

(65) 对任何正整数 m，$16^m \equiv 16+20t \pmod{100}$，故当 $n=2m+1$ 时

$$2^{2m}(2^{2m+1}-1)=4\times 16^m(8\cdot 16^m-1)\equiv 28 \pmod{100}$$

(66)、(67)、(68) 由艾森斯坦定理立得。

(69) 原式为 $P(x)=x^n$ 的 n 阶差分 $n!$。

(70) $p=3, q=2, r=2, s=3$

(71) $x=3, r=2, p=2, n=3$

六 几何历史名胜景观

【试题】

题 72 已知一个锐角三角形，试在这个三角形中求一点，使这点到三个顶点的距离之和为最小。

（IMO 备选题，30 届）

题 73 O 是锐角 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$，$P$ 是 $\triangle ABC$ 内任一点。

求证：$PA + PB + PC \geqslant OA + OB + OC$。

（杭州，1983 初中；陕西，1978）

题 74 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 120°$，P 是 $\triangle ABC$ 内一点，则（　　）。

(A) $PA + PB + PC < AB + AC$

(B) $PA + PB + PC > AB + AC$

(C) $PA + PB + PC = AB + AC$

(D) $PA + PB + PC$ 与 $AB + AC$ 的大小关系不确定，与 P 点的位置有关。（福州、武汉、广州初中联赛，1984）

题 75 证明：在任一个三角形中，不等式 $R \geqslant 2r$ 恒成立，而且等式 $R = 2r$ 仅对正三角形才成立。其中 R 与 r 分别是这个三角形的外接圆和内切圆半径。（莫斯科，1948）

题 76 已知一等腰三角形的外接圆半径为 R，内切圆半

径为r。证明：两圆圆心的距离$d=\sqrt{R(R-2r)}$。

(IMO，4 届)

题 77　对任何$\triangle ABC$，求证：

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}<\frac{1}{4}$$

(匈牙利，1896)

题 78　设a、b、c是正数，求证：

$$abc\geqslant(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

(瑞士，1983)

题 79　设三个复数z_1、z_2与z_3满足关系式

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|,\quad 且\ z_1+z_2+z_3=0$$

试证这三个复数在复平面上所表示的点是正三角形的顶点。

(成都，1963)

题 80　圆的内接四边形的两条对角线互相垂直。求证：过对角线的交点且垂直于一边的直线必平分其对边。

(石家庄，1978)

题 81　圆内接四边形的两对角线互相垂直，则对角线之交点到一边中点的线段长等于圆心到这边的对边的距离。

(上海，7 届)

题 82　边长依次为a、b、c、d的圆外切四边形的面积$A=\sqrt{abcd}$，则它可内接于某个圆。　　(普特南，31 届)

题 83　设$\angle MON=\frac{\pi}{2}$，在边OM、ON及$\angle MON$内分别求点A、B、C，使$BC+AC=l$(定长)，且四边形$OACB$有最大面积。　　(北京，1978)

题 84　定点A和B分别在定直线l的两侧，$AC\perp l$，$BD\perp l$，C、D是垂足，M是CD内的一点，p和q是已知正数。试证：当$p\cdot AM+q\cdot BM$最小时，有$p\cdot\sin\angle CAM=q\cdot$

$\sin\angle DBM$ （福建，1978）

题 85 从半圆上一点 C 向直径 AB 作垂线 CD，D 是垂足。以 AD、BD 为直径在半圆 ACB 内分别作两个半圆，设这两半圆的外公切线为 EF，且 E、F 为切点。

求证：(1) $CD \doteq EF$

(2) D、E、C、F 是某矩形的四个顶点。（江苏，1978）

题 86 在 $\triangle ABC$ 中，D、E、F 为三边的中点，X、Y、Z 为三条高的足，H 为垂心，P、Q、R 分别为连结 H 与三个顶点的线段的中点。求证：D、E、F、P、Q、R、X、Y、Z 九点共圆。

（IMO 备选题，29 届）

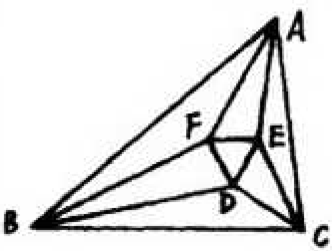
题 87 设 U、V 是椭圆上的两个不同的点，M 是 UV 的中点，AB 和 CD 是过 M 的另两条弦，且直线 AC、BD 和直线 UV 分别交于点 P、Q。求证：M 是线段 PQ 的中点。

（普特南，24 届）

题 88 如（图 8），AE 和 AF，BF 和 BD，CD 和 CE 分别是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$ 和 $\angle C$ 的三等分线。求证：$\triangle DEF$ 是等边三角形。 （上海，1982）

题 89 在直角三角形 ABC 中求点 N，使

$\angle NBC = \angle NCA = \angle NAB$ （匈牙利，1895）



（图 8）

题 90 给定两个正 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$，设 A''、B''、C'' 分别是 AA'、BB'、CC' 的中点，则 $\triangle A''B''C''$ 也是正三角形。

又问：若把"正三角形"改成"正方形"，命题是否成立？

（北京，1980；芜湖，1983）

【背景】

题 72—74 源自如下问题：在 $\triangle ABC$ 中求一点 P，使得 $PA+PB+PC$ 达到最小值。

这样的点 P 称为费尔马（Fermat，1601 － 1665）点。

卡瓦列里（Cavalieri，**1598 － 1647**）**定理**：$\triangle ABC$ 中的点 P 使 $PA+PB+PC$ 达到最小，当 $\triangle ABC$ 的每一个内角都小于 120° 时，点 P 正好使 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$；当 $\triangle ABC$ 有一个内角 $\geqslant 120°$ 时，则点 P 与这个钝角的顶点重合。

题 75　即欧拉（Euler 1707 － 1783）不等式。

题 76　实际上对一切三角形都成立，此即恰泊尔（Chapple）定理。

题 77、题 78 为欧拉不等式的直接应用。

题 79 为下述定理之特例。

定理：三角形的内心，外心，重心，垂心，若有两心重合，则四心皆重合。当且仅当三角形为正三角形时，四心重合。

题 80　即婆罗摩笈普塔（Brahmagupta，公元 600 年左右）定理。

题 81 是上述定理的直接应用。

题 82 为下述四边形面积公式的直接应用。

定理：四边形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，则其面积

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}$$

其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$。

由此定理可以得到：

① 若四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，则 $A+C=180°$，故

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

此为著名的海伦(Heron，公元前 100 年左右)公式的推广。

② 若四边形 $ABCD$ 是圆外切四边形，则 $a+c=b+d$，故 $(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)=abcd$，从而

$$S=\sqrt{abcd}\cdot\sin\frac{A+C}{2}$$

本题考虑的是双心四边形，即既有内切圆，又有外接圆的四边形。诸如此类的双心多边形是近代几何中一个还有待深入研究的问题。

题 83 源于斯坦纳(Steiner；1796 — 1863)等周定理。

斯坦纳定理：周长一定的 n 边形区域，正 n 边形面积最大；周长一定的平面区域，圆的面积最大。

题 84 即物理学中的光线折射定理。

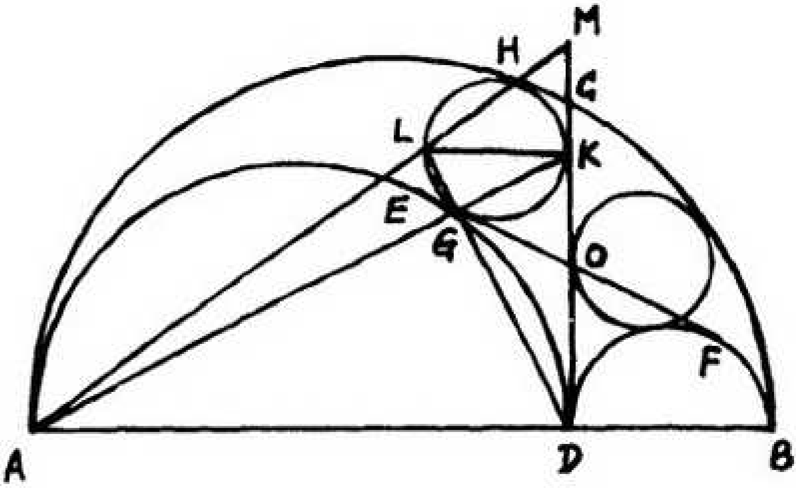
题 85 中，三半圆围成的形状称鞋匠刀形(Shoe — Maker's knife)。最早对鞋匠刀形进行研究的数学家是阿基米德(Archimedes，前 287 — 前 212)。

鞋匠刀形有不少趣味的性质。比如(图 9)

① CD、EF 互相平分。

② 鞋匠刀形面积等于以 CD 为直径的圆面积。

③ AC 过切点 E，BC 过切点 F。



（图 9）

④　曲边三角形 ADC 与曲边三角形 BDC 的内切圆半径相等。

⑤　设 LK 是曲边三角形 ADC 的内切圆直径，且 $LK \parallel AB$，与大半圆切于 H，与小半圆切于 G，则

A、L、H 共线，

B、K、H 共线，

A、G、K 共线，

D、G、L 共线。

⑥　设 AH 与 DC 延长交于 M，则 K 是 $\triangle ABM$ 的垂心。

题 86　即著名的九点圆定理。又称欧拉圆定理。因为费尔巴赫(Feuerbach，1800 — 1834) 对九点圆的性质有较深的研究，故有人误称九点圆为费尔巴赫圆。

题 87 是蝴蝶定理的推广。

题88是莫雷(F. Morley)于1899年发现的一条"新奇"的

定理。

题 89 的点 N 称布洛卡(Brocard,1845 － 1920) 点。

布洛卡定理:对任何三角形 ABC,存在点 P,Q,使

$\angle PBC = \angle PCA = \angle PAB$,

$\angle QCB = \angle QAC = \angle QBA$。

(这两个点分别称为 $\triangle ABC$ 的正、负布洛卡点)。

布洛卡点有不少趣味的性质:

① $\angle PBC = \angle QCB$,这个角称为布洛卡角,记为 ω。

② $\operatorname{ctg}\omega = \operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C$。

③ 过 P、A、B 的圆与 BC 相切,过 P、B、C 的圆与 CA 相切,过 P、C、A 的圆与 AB 相切。

过 Q、A、B 的圆与 CA 相切,过 Q、B、C 的圆与 AB 相切,过 Q、C、A 的圆与 BC 相切。

题 90 是美国数学家艾柯尔(Echols)1932 年得到的定理。

艾柯尔定理:设 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 是正 n 边形,C_1,C_2,…,C_n 分别是 A_1B_1,A_2B_2,…A_nB_n 的定比分点,即 $A_1C_1/C_1B_1 = A_2C_2/C_2B_2 = \cdots = A_nC_n/C_nB_n$,则 $C_1C_2\cdots C_n$ 也是正 n 边形。

【解答】

(72),(73) 见本丛书的《平面几何思维训练》。

(74) 选(B)。

(75),(76) 见本丛书的《平面几何思维训练》。

(77) 结论可加强为 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$。因

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$= \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

$abc = 4R\triangle$, $(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{\triangle^2}{p} = r\triangle$，故

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{c}{2} = \frac{r}{4R} \leqslant \frac{1}{8}$$

(78) 不妨设 $a \geqslant b \geqslant c > 0$，若 $a \geqslant b + c$，则

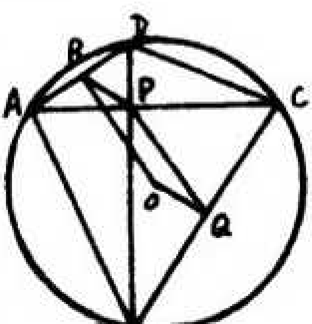
$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leqslant 0 < abc$$

若 $a < b + c$，则 a,b,c 是某三角形的三边长，故由题(77)

$$\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc}$$

$$= \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \leqslant 1$$

(79) 设 z_1,z_2,z_3 在复数平面上所表示的点分别是 A,B,C，因 $|z_1| = |z_2| = |z_3|$，故原点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心。$\triangle ABC$ 的重心对应复数 $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) = 0$，故 O 也是 $\triangle ABC$ 的重心。$\triangle ABC$ 的重心，外心重合，故 $\triangle ABC$ 是正三角形。



(图 10)

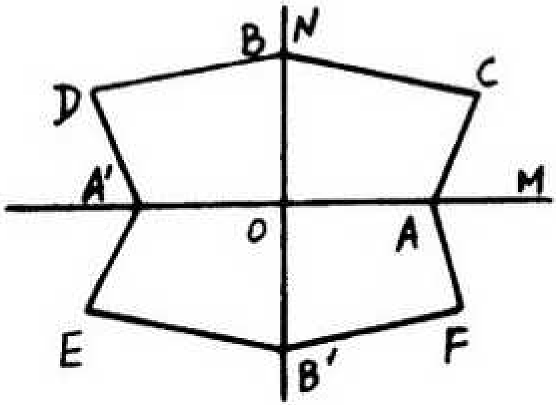
(80) 见本丛书的《平面几何思维训练》

(81) 如(图 10)，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，$AC \perp BD$，AC，BD 交于点 P，Q 为 BC 的中点，$OR \perp AD$，R 为垂足，则 R 是 AD 的中点。

由婆罗摩笈普塔定理得 $PQ \perp AD$，故 $PQ \parallel OR$，再由这

定理得 $PR \perp BC$，因为 Q 为 BC 中点，故 $OQ \perp BC$，从而 $PR \parallel OQ$，则四边形 $OQPR$ 是平行四边形，得 $PQ = OR$。

(82) 见背景部分。



(图 11)

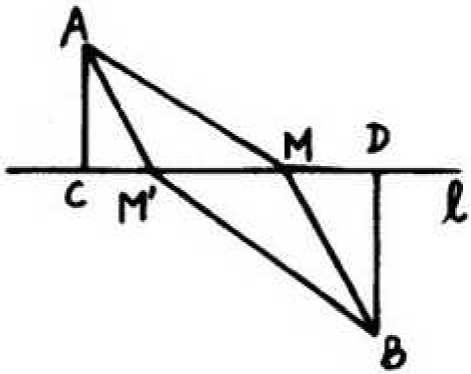
(83) 如(图 11)构造折线 ACB 关于 OM，ON 的轴对称线及关于 O 的中心对称线得八边形 $ACBDA'EB'F$，周长是 $4l$ 为定长，面积为 $OACB$ 面积的 4 倍。由斯坦纳定理，当且仅当这个八边形为正八边形时，面积达最大值。这时 $\angle OAC = \angle OCA = 67.5°$，$AC = \frac{1}{2}l$，故

$$OA = OB = OC = \frac{l}{4\sin 22.5°},$$

点 C 在 $\angle MON$ 的平分线上。

(84) 如(图 12)，设 $AC = a$，$BD = b$，$CD = c$，$\angle CAM = \alpha$，$\angle DBM = \beta$，点 M 使 $p \cdot AM + q \cdot BM$ 达最小，点 M' 是 CD 中异于 M 的动点，$\angle CAM' = \alpha'$，$\angle DBM' = \beta'$，则

$$a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta = c = a\operatorname{tg}\alpha' + b\operatorname{tg}\beta' \tag{1}$$



（图 12）

且

$$(AM' + BM') - (AM + BM)$$
$$= ap(\frac{1}{\cos\alpha'} - \frac{1}{\cos\alpha}) + bq(\frac{1}{\cos\beta'} - \frac{1}{\cos\beta}) \geqslant 0$$

由(1)得

$$a = -\frac{b(\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\beta')}{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha'}$$

故

$$q(\frac{1}{\cos\beta'} - \frac{1}{\cos\beta}) - p \cdot \frac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\beta'}{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha'}(\frac{1}{\cos\alpha'} - \frac{1}{\cos\alpha}) \geqslant 0$$

$$\sin\frac{\beta - \beta'}{2}[p\sin\frac{\alpha + \alpha'}{2}\cos\frac{\beta - \beta'}{2} - q\sin\frac{\beta + \beta'}{2}\cos\frac{\alpha - \alpha'}{2}] \geqslant 0$$

当 $\beta' \geqslant \beta$ 时，

$$p\sin\frac{\alpha + \alpha'}{2}\cos\frac{\beta - \beta'}{2} - q\sin\frac{\beta + \beta'}{2}\cos\frac{\alpha - \alpha'}{2} \leqslant 0$$

令 $\beta' \to \beta$，则 $\alpha' \to \alpha$，得 $p\sin\alpha \leqslant q\sin\beta$

当 $\beta' \leqslant \beta$ 时，

$$p\sin\frac{\alpha+\alpha'}{2}\cos\frac{\beta-\beta'}{2}-q\sin\frac{\beta+\beta'}{2}\cos\frac{\alpha-\alpha'}{2}\geqslant 0$$

令 $\beta'\to\beta$，则 $\alpha'\to\alpha$，得

$$p\sin\alpha\geqslant q\sin\beta$$

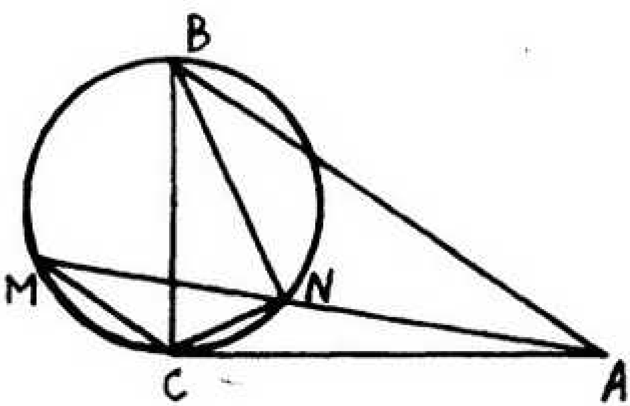
故

$$p\sin\alpha=q\sin\beta$$

(85) 如(图 9)，(1) 设两个小半圆半径分别是 r_1，r_2，则外公切线长 $EF=2\sqrt{r_1r_2}$。又 $Rt\triangle ABC$ 中，斜边高 $CD=\sqrt{AD\cdot DB}=\sqrt{2r_1\cdot 2r_2}=2\sqrt{r_1r_2}$，故 $EF=CD$。

(2) 设 CD、EF 交于点 O，则 $OE=OD=OF$。因 $CD=EF$，$OD=\frac{1}{2}EF$，所以 $OC=OD$，即四边形 $DECF$ 的对角线互相平分且相等，故必为矩形。

(86)、(87)、(88) 见《平面几何思维训练》



(图 13)

(89) 如(图 13)，设 $\angle C=90°$，以 BC 为直径作圆，过 C 作

$CM \parallel AB$ 与圆交于 M，AM 与圆交于 N，则 N 为所求之点。

(90) 利用复数法。

我们证明一般的艾柯尔定理。

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,B_1,B_2,\cdots,B_n,C_1,C_2,\cdots,C_n$ 对应的复数分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n,c_1,c_2,\cdots,c_n$。若

$$\frac{A_jC_j}{C_jB_j}=\lambda,$$

则

$$c_j=\frac{1}{1+\lambda}(a_j+\lambda b_j)$$

因 $A_1A_2\cdots A_n$，$B_1B_2\cdots B_n$ 是正 n 边形，则

$$a_{j+1}-a_j=(a_j-a_{j-1})(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})$$

$$b_{j+1}-b_j=(b_j-b_{j-1})(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})$$

$$j=2,3,\cdots,n+1$$

(约定 $a_{n+1}=a_1,a_{n+2}=a_2,b_{n+1}=b_1,b_{n+2}=b_2$) 故

$$c_{j+1}-c_j=(c_j-c_{j-1})(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})$$

所以 $C_1C_2\cdots C_n$ 是正 n 边形。

七 组合、图论名胜景观

【试题】

题 91 试证明：在任何一群人中，认识这群人中奇数个人的人有偶数个。 （匈牙利，1942）

题 92 $\triangle ABC$ 为正三角形，其边长为整数 N，考虑满足下式：

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{N}(n \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{AC})$$

的点 M 的集合 S，其中 m 与 n 为整数，$0 \leqslant n \leqslant N$，$0 \leqslant m \leqslant N$，$m + n \leqslant N$，$S$ 的点染上蓝、白或红色，并满足条件：

(1) $S \cap AB$ 的点不染蓝色；

(2) $S \cap AC$ 的点不染白色；

(3) $S \cap BC$ 的点不染红色。

证明：存在一个边长为1的正三角形，它的顶点属于 S，且顶点分别为红、蓝、白色。 （IMO 备选题，30 届）

题 93 n 个点由线段连结着。已知每一点和另外任何一个点都有折线相连，而任何两点都没有两种不同的连结线段。证明：线段的总条数等于 $n-1$。 （全俄，1 届）

题 94 议会的每一议员都有不多于 3 个政敌。求证：议会可分成两院，使得每一院中，每一个人的政敌都不多于 1 个。（注意：如果 B 是 A 的政敌，那么 A 也是 B 的政敌）

（全苏，13 届）

题 95　某国家建立航空网，任何一个城市与不多于 3 个城市有航线直接通航，而且从任何一个城市到另外一个城市最多只换乘一次。问这个国家最多可能有多少个城市？

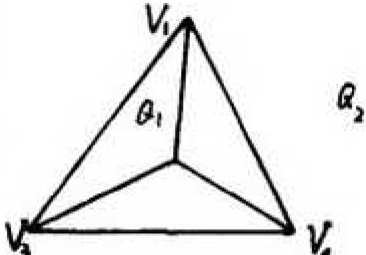
（全苏，3 届）

题 96　如（图 14）所示，任意给定点 Q_1, Q_2，它们不在图中的任一线段上。求证：不存在连接点 Q_1, Q_2 的折线 P，使得

（1）折线 P 与图中每一条线段恰相交一次；

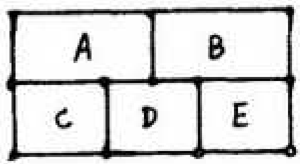
（2）折线 P 不自身相交；

（3）折线 P 不经过任一顶点 V_1, V_2, V_3 和 V_4。（普特南，7 届）



（图 14）

题 97　（图 15）是由 16 条线段组成的图形。证明不能画出一条折线，它和图形的每一条线段都相交，而且只相交一次（这条折线可以是开的，可以是自身相交的，但折线的顶点不能在线段上，而折线的边也不能通过线段的公共端点）。　（全俄，1 届；莫斯科，1961）



（图 15）

题 98　平面上取 $n > 2$ 个点，每个点用线段与其余各点相连，能否一笔画出所有这些线段，使第一条线段的终点与第二条线段的起点相重合，第二条线段的终点与第三条线段的起点相重合，第三条线段的终点与第四条线段的起点相重合，等等，最后的一条线段的终点与第一条线段的起点相重合？

（波兰，1964）

题 99　阿瑟王在王室召见他的 $2n$ 个武士，某些武士之间互相有仇，但每一个武士的仇人不超过 $n-1$ 人。求证：阿瑟王的谋臣米尔林能让这 $2n$ 个武士围在一圆桌周围，使每一武士相邻座位的都不是自己的仇人。　　（莫斯科，1964）

题 100　平面上有 40 个点，任三点不共线，每一点至少与其余 27 个点之间有线段相连接。求证：必可找到 4 点，它们之中任两点间有线段相连接。　　（江苏，1986，初中）

题 101　大厅里聚集了 100 个客人，他们中每人至少与 67 个其他人相识。求证：在这些客人中存在 4 人，他们两两相识。但是，如果他们中每人至多只与 66 个其他人相识，那么可能任何 4 个人中，必有两人互不相识。　　（波兰，1966）

题 102　一次会议有 1990 位数学家参加，其中每人至少有 1327 位合作者。证明：可以找到四位数学家，他们中每两个人都合作过。　　（IMO 备选题，31 届）

题 103　由 10 个大学生按照下列条件组成运动队：(1) 每人可参加若干个运动队；(2) 任一运动队不能完全包含在另一运动队中，或与其他运动队重合（但可以部分重合）。问：至多可组成多少个运动队？每队是多少人？

（苏联，1977，大学生）

题 104　在学校里有 $2n$ 门课程，所有学生的成绩都是 4 分或 5 分。任何两个学生的成绩都不全一样，任何两个学生也不能说一个比另一个成绩好。证明：在这个学校里学生的总数不超过 C_{2n}^{n}。（这儿，学生甲比学生乙成绩好指的是：如果各门功课的成绩，学生甲不比学生乙差，而有某些功课，甲比乙好。）　　（莫斯科，1958）

题 105　设 A 是一个有 n 个元素的集合，A 的 m 个子集

$A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互不包含。试证：

$$(1)\ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_n^{|A_i|}} \leqslant 1 \quad (2)\ \sum_{i=1}^{m} C_n^{|A_i|} \geqslant m^2$$

其中 $|A_i|$ 表示 A_i 所含元素的个数，$C_n^{|A_i|}$ 表示 n 个不同元素取 $|A_i|$ 个的组合数。（全国联赛，1993）

题 106 一个保险柜的锁由三个旋纽组成，每个旋纽有 8 种不同位置。由于保险柜构造上的缺点，三个旋纽中只要有两个在正确位置时，柜门即被打开。问至少尝试多少次组合，才能保证门一定被打开（假定不知道“正确的组合”）？

（IMO 备选题，29 届）

题 107 如果在集合 A 中，存在 m 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_m$（允许相同），满足等式 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} = a_m$，那么我们就说集合 A 是 m 项相关的。已知集合 $\{1, 2, \cdots, n_m\}$ 被任意划分为两个不相交的集合的并时，在这两个集合中都必定存在至少一个集合是 m 项相关的，其中 $m \geqslant 3$。试问：自然数 n_m 的最小可能值是多少？并证明你的结论。（全国集训队，1991）

题 108 给定一个 n 个顶点的完全有向图，即给定 n 个点 $1, 2, \cdots, n$，任何两个点 i 和 j，指定一个方向 $\rightarrow$：$i \rightarrow j$ 或 $j \rightarrow i$。求证：可以把点 $1, 2, \cdots, n$ 重新排列成 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使 $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n$。（美国，19 届）

题 109 $n(>3)$ 名乒乓球选手单打比赛若干场后，任意两个选手已赛过的对手恰好都不完全相同。证明：总可以从中去掉一名选手，使得余下的选手中，任意两个选手已赛过的对手，仍然都不完全相同。（全国联赛，1987）

题 110 对有限集 X 的每一不同元素对 (x, y)，都有一个数 $f(x, y) = 0$ 或 1 与之对应，并且对所有 $x, y(x \neq y)$，有

$f(x,y) \neq f(y,x)$。证明以下情况恰有一种出现：

(1) X 是两个不相交的非空集合 U、V 之并，对任意 $u \in U$，$v \in V$，有 $f(u,v) = 1$，

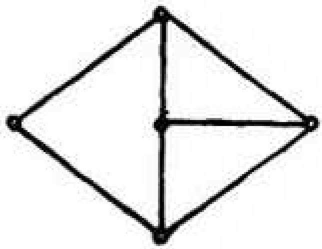
(2) X 的元素可标上 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使得 $f(x_1,x_2) = f(x_2,x_3) = \cdots = f(x_{n-1},x_n) = f(x_n,x_1) = 1$。

(IMO 备选题，30 届)

题 111 一次舞会上参加者是男孩和女孩，每个男孩有若干个女友，任给一个男孩的集合 M，至少以 M 中一个男孩为男友的女孩集合人数不少于 M 的人数。证明：每个男孩能和他的一个女友同时起舞。 (罗马尼亚选拔赛，1978)

题 112 在一次国际象棋比赛中有 n 个选手，每人要同其他所有参加者比赛一场(每天最多一场)。进行全部比赛最少要用多少天？

(罗马尼亚，1978)



(图 16)

题 113 试问：至少要几种颜色才能给(图 16) 中的边着色，使得有公共端点的任何两条边染不同的颜色(需要证明你的结论)。 (福建，1983，初中)

题 114 设 $a_i, b_i (a_i < b_i, i = 1,2,\cdots,n)$ 是实数，n 个闭区间 $[a_1,b_1], [a_2,b_2], \cdots, [a_n,b_n]$ 中任两个闭区间至少有一个公共点。求证：存在点，它在所有的 n 个闭区间上。

(普特南，14 届)

题 115 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geqslant 4)$ 为平面上的凸集，每 3 个凸集有公共点。求证：存在一点属于所有这些凸集。

(IMO 备选题，31 届)

题 116　考察 V 个不同的元素 $a,b,c,\cdots,h$ 构成的无序对，像 bc,ca,ab 这样的三对称为一个三角形。求证：如果 $4e\leqslant V^2$，则可以选择 e 对，它们不能组成任何三角形。

（普特南，26 届）

题 117　空间中的 $2n$ 个点（$n>1$），用 n^2+1 条线段连接。求证：至少形成一个三角形。并证明：对每个 n，存在 $2n$ 个点，用 n^2 条线段连接，不形成任何三角形。　（普特南，16 届）

题 118　有 20 个队参加比赛，任何三队中，必有两队已经比赛过，至少要进行多少场比赛？　（全苏，3 届）

题 119　S 是满足 $1\leqslant a<b\leqslant n$ 的 m 个无序正整数对（a，b）组成的集合。求证：至少有 $4m\cdot\dfrac{m-\dfrac{n^2}{4}}{3n}$ 个三元组（a,b,c），使得（a,b），（b,c），（c,a）都属于 S。

（注：这儿的"无序"指的是：（a,b）与（b,a）视为同一对。）

（亚太地区，1989）

题 120　已知空间中九点，其中任何四点不共面。在这九点间连结若干条线段，使图中不存在四面体。问图中最多有多少个三角形？　（国家集训队试题，1994）

题 121　已知 A、B、C、D 为平面上的两两距离不超过 1 的任意四个点。今欲作一个圆覆盖此四点（即 A、B、C、D 在圆内或圆周上），问半径最少该为多少？试证明之。（上海，1985）

题 122　设 A、B、C 三点彼此间距离都不超过 1，证明必定可找到一个半径不超过 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 的圆包含这三点在内。

（上海，1963）

题 123　设 k 是平面曲线，k 上任两点距离小于 1。求证：k

在一个半径为$\frac{1}{\sqrt{3}}$的圆内。（普特南，9届）

题 124 证明：除四面体外，不存在任何一个凸多面体，它的每一个顶点和所有其余顶点之间有棱相连接。

（匈牙利，1947）

题 125 证明：在空间中不可能有这样的多面体存在，它们有奇数个面，而它们的每个面又都有奇数条边。

（北京，1956）

题 126 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是集合$S_n = \{1, 2, \cdots, n\}$的一个置换。$S_n$的元素$i$称为这个置换的一个固定点，如果$a_i = i$。$S_n$的置换如无固定点，称为$S_n$的一个更列。$S_n$的更列数记为$g_n$。

求证：(1) $g_1 = 0, g_2 = 1, g_n = (n-1)(g_{n-1} + g_{n-2})$ $(n > 2)$。

(2) S_n恰有一个固定点的置换数记为f_n，则 $|f_n - g_n| = 1$。（加拿大，1982）

题 127 设$P_n(k)$是集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的保持k个点不动的排列数目。

求证：$\sum\limits_{k=0}^{n} kP(k) = n!$（IMO，28届）

题 128 设n阶行列式D的主对角线元素都是0，其余元素都是1。求证：它的展开式中，非零项的数目是

$n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$（普特南，19届）

题 129 平面上任给四个相异的点，它们之间的最大距离与最小距离之比记为λ。求证：$\lambda \geqslant \sqrt{2}$。

（匈牙利，1961；德国，1962；澳大利亚，1991）

题 130 在平面上放置四个点，两两连结所成的六条线

段，其中最大线段长为 1，最小线段长为 a，则所有满足上述条件的四个点中，a 所取之最大值是多少？（北京，1990，高一）

题 131 平面上任给五个相异的点，它们之间的最大距离与最小距离之比记为 λ。求证：$\lambda \geqslant 2\sin 54°$，并讨论等号成立的充要条件。（全国联赛，1985）

题 132 平面上任给六个相异的点，它们之间的最大距离与最小距离之比记为 λ。求证：$\lambda \geqslant \sqrt{3}$。

（波兰，1966；普特南，25 届；奥地利，1975）

题 133 考察平面中 $3n$ 个不同的点组成的集合 M，任两点之间的距离不超过 1。证明：

(1) 对 M 的任何四点中，至少有两个点，其距离不超过 $\frac{1}{\sqrt{2}}$。

(2) 如果 $n=2$，对任何 $\varepsilon>0$，存在六个点的构形，使其 12 个距离属于区间 $(1-\varepsilon, 1)$，但不存在这样的构形，使至少 13 个距离属于 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$。

(3) 存在一个半径不超过 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的圆，含了所有的点。

(4) M 中存在两点，其距离不超过 $\frac{4}{3\sqrt{n}-\sqrt{3}}$。

（罗马尼亚，1978 选拔赛）

【背景】

题 91、92 是图论中如下一个定理及其推论的直接应用。

定理 1 一个图中所有点的度之和是边数的两倍。

推论 2 任何图中，度为奇数的点有偶数个。(注：图中点

的度指的是该点所引出的边的条数）

题 92 又是斯泊奈(Sperner) 于 1928 年得到的引理的特例。

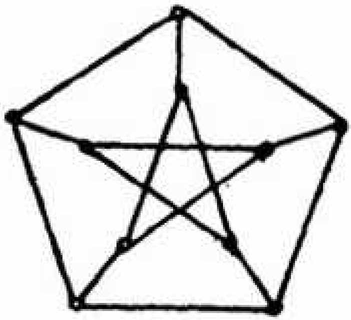
题 93 背景为如下定理：

定理 3 一个图是树，即连通且没有回路，则它的边数比点数少 1。

题 94 是前苏联数学家博罗金(O. B. Ворокин) 提出的，它可推广为如下图论定理。

定理 4 一个图中所有点的度均不大于 $2k+1$，则可把点分成两部分 A 与 B，使得 $A(B)$ 中每一点至多只与 $A(B)$ 中 k 点相邻。

题 95 源于(图 17)，此图称为彼得森(Petersen) 图。



(图 17)

题 96、97、98 直接应用欧拉(Euler) 图的判别定理。

定理 5 一个连通图是欧拉图，即存在一条包含每条边一次且只一次的回路，当且仅当图中所有点的度是偶数。

推论 6 一个连通图能一笔画，当且仅当图至多有两个点的度是奇数。

题 99 直接应用哈密顿(Hamilton，1805 — 1865) 图的判别定理，即狄拉克(Dirac)1952 年发现的一个定理。

定理 7 （狄拉克定理） 简单图（即任两个不同点至多一条边连接）中，每一点的度不小于点数的一半，则这图是哈密顿图，即存在包含所有点一次且只一次的回路。

题 100 — 102 源于扎兰基维茨(Zarankiewicz)定理。

定理 8 空间中 $n(\geqslant k\geqslant 2)$ 点，任 4 点不共面，每一点至少与 $[\frac{(k-2)n}{k-1}]+1$ 个其它点用线段相连，则至少有 k 点，两两之间有线段相连。

题 103，104 为斯泊奈定理之特例。

定理 9 n 元集至多有 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 个子集两两互不包含。

题 105(1) 为波罗巴斯(Bollobas)1965 年发现的定理，用此定理可证明斯泊奈定理。

题 106 是卡弗雷斯(Kalbfleisch)与斯坦通(Stanton)于 1969 年得出的结果：若旋组有 p 种位置，至少要尝试 $[\frac{p^2+1}{2}]$ 次组合。

题 107 是比特斯巴恰(Beutelspacher)与伯雷斯特万斯基(Brestovansky)1982 年提出的问题。

题 108 为雷地(Redei)1934 年证明的定理。

题 110 是莫恩(Moon)1966 年证明的定理。

题 111 是霍尔(Hall)1935 年证明的定理。

题 112，113 是关于图的边色数，即使得有公共端点的两条边不染同一种颜色所需要的最少色数。

题 114，115 即海莱(Helly)定理。

题 116 — 120 为托兰(Turan)型定理。其中题 119 是曼帖尔(Mantel)1907 年证明的。

题 121 — 123 为扬格(Jung)定理。

题 124 之背景是：$n(\geqslant 5)$ 点的完全图(即任两不同点有边连接的图)必非平面图。

构造平面图的对偶：每一区域视为一点，两区域有一公共

边界，则连接相应两点，得到的图是这个平面图的对偶。题125实质与题91相同。

题126 — 128是更列问题。下述定理可利用容斥法则证明。

定理10 集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 的更列数

$$D_n=n![1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}]$$

题129 — 133是海伯伦(Heilbronn)型问题：平面上给定 n 个点，两两之间距离最大值 D，最小值 d，则 D/d 的最小值 λ_n 是多少？

题129表明 $\lambda_4=\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$，　题131表明 $\lambda_5=2\cos\frac{\pi}{5}$。现在已证得 $\lambda_6=2\cos\frac{\pi}{10}$，$\lambda_7=2$，$\lambda_8=1+\cos\frac{2\pi}{7}$。当 $n\geqslant 9$ 时，λ_n 的值还未能确定。

【解答】

(91) 这群人为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，A_i 与 A_j 相识记为 (A_i,A_j)，设共有 k 对相识，则涉及 $2k$ 人次。设 A_i 认识 d_i 人，则在这 k 对中 A_i 出现 d_i 次，故 $d_1+d_2+\cdots+d_n=2k$ 是偶数，从而 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 中为奇数的项数必为偶数。

(92) 每个边长为1的正三角形视为一点，$\triangle ABC$ 外部视为一点。如果一个小正三角形与 $\triangle ABC$ 的外部或两个小正三角形有边长为1的公共边，且这边的两个端点染不同颜色，则相应两点连一条线。

由条件知点 A、B、C 必分别染红、白、蓝色。故 AB、BC、

CA 上均有奇数条边长为 1，且两端异色的边。显然，这些边所在的小正三角形对应点的度数至少是 2，且与 $\triangle ABC$ 外部对应的点的度数为奇数。由推论 2（证法如题 91），必有一小正三角形对应点度为奇数 3，此三角形三个顶点两两异色。

(93) 首先证明，必有一点是唯一线段的端点，然后对 n 行数学归纳法。

(94) 议员 A 与 B 是政敌，称为一个政敌对。分成两院的有限种可能分法中，两院内政敌对之和最小的一种分法合本题要求。若不然，必有某院一议员 A 至少有两政敌。这时，把 A 调往另一院所得分院方法至少能减少一政敌对，与原分院方法政敌对之和最小矛盾。

(95) 与城市 A_1 直接通航的至多 A_2，A_3，A_4 三市；与 A_2，A_3，A_4 每一市直接通航的除 A_1 外至多两市，异于 A_2，A_3，A_4 的共至多六市 A_5，A_6，A_7，A_8，A_9，A_{10}。与 A_1，A_2，…，A_{10} 直接通航的城市均在 A_1，A_2，…，A_{10} 中。否则，此市与 A_1 至少得换乘两次才能到达。故最多有 10 个城市。

由彼得森图（图 17），最大可能值为 10。

(96) 每一个区域视为一点，任两区域都有公共边，相应的两点连一线，则该图有 4 点，每点的度均为 3，故不能一笔画。

(97) 如上，该图有 6 点，度分别是 4、4、5、5、5、9，故不能一笔画。

(98) 图有 n 点，每点度均为 $n-1$，故当且仅当 $n-1$ 为偶数，即 n 为奇数时，才能一笔画。

(99) 见本丛书《数学宫趣游》。

(100 － 102) 证一般的命题，即定理 8。

记 $t=\left[\frac{(k-2)n}{k-1}\right]+1$，点 A_1 至少与 t 点 $B_1,B_2,\cdots,B_t$ 相连；B_1 至少与 t 点相连，其中异于 $B_1,B_2,\cdots,B_t$ 的点有 $n-t$ 个，故 B_1 至少与 $B_1,B_2,\cdots,B_t$ 中的

$$t-(n-t)=2t-n$$

个点 $C_1,C_2,\cdots,C_{2t-n}$ 相连。记 $B_1=A_2$。同理，C_1 至少与 $C_1,C_2,\cdots,C_{2t-n}$ 中的 $3t-2n$ 个点 $D_1,D_2,\cdots,D_{3t-2n}$ 相连。记 $C_1=A_3$，依此下去，$A_{k-1}=P_1$ 至少与 $P_1,P_2,\cdots,P_r$ 中的 $(k-1)t-(k-2)n>0$ 个点相连，记其中一点为 A_k，则 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两相连的 k 点。

(105) 设 $A=\{1,2,\cdots,n\}$。$1,2,\cdots,n$ 的排列 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n$ 称为 i 型排列，若排列的前 $|A_i|$ 个元素恰为 A_i 的元素。因 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不包含，故每一排列至多属于一个型。i 型排列有 $|A_i|!(n-|A_i|)!$ 个，故

$$\sum_{i=1}^{m}|A_i|!(n-|A_i|)!\leqslant n!$$

两边除以 $n!$，得(1)

由哥西不等式，得

$$\left(\sum_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\right)\geqslant\left[\sum_{i=1}^{m}\sqrt{C_n^{|A_i|}}\cdot\sqrt{\frac{1}{C_n^{|A_i|}}}\right]^2=m^2$$

得(2)。

(104) 因对一切 i，$C_n^{|A_i|}\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}$，故由(1)得 $m\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}$，取 $n=10$ 得题 103 答案：至多 C_{10}^5 个运动队，每队 5 人。

(106) 32

(107) $n_m=m^2-m-1$

(108) 对 n 行数学归纳法。

(109) 与选手 i 赛过的选手集记为 A_i，则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两

两两不同。若 A_i 比 A_j 恰多一个或少一个选手，则点 i 与 j 连一线，并称这边由这多或少的选手引起，得 n 点图。若此图有回路，则回路上必有两边 ij 与 $i'j'$ 由同选手引起。去掉边 $i'j'$，"引起的选手"集不变。依此下去可得无回路图，边数 $\leqslant n-1$，故"引起的选手"集至多有 $n-1$ 名选手，即必有选手 k，任何边不是由他引起。去掉选手 k，则对任两个不同的 i，j，$A_i-\{k\}\neq A_j-\{k\}$。

(110) 情况(1)不出现，对 v 归纳证明：存在 $v(3\leqslant v\leqslant n)$ 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_v$，使

$$f(x_1,x_2)=f(x_2,x_3)=\cdots=f(x_{v-1},x_v)=f(x_v,x_1)$$

(111) 对男孩个数行归纳法。

(112) 要 $2[\frac{n-1}{2}]+1$ 天

(113) 4 种。

(114) 先证：$\max a_i\leqslant\min b_i$，得 $\max a_i$ 在所有闭区间中。

(115) 对 n 归纳证明：平面上 $n\geqslant 4$ 个凸集，每 $n-1$ 个凸集有公共点，则所有凸集有公共点。

(116) 有 $v=2n$ 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 时，选 $\frac{v^2}{4}=n^2$ 对：$a_ia_j(1\leqslant i\leqslant n,\ \ n+1\leqslant j\leqslant 2n)$ 中的 e 对；有 $v=2n+1$ 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$ 时，选 $[\frac{v^2}{4}]=n^2+n$ 对：$a_ia_j(1\leqslant i\leqslant n,\ n+1\leqslant j\leqslant 2n+1)$ 中的 e 对。

(117) 对 $n\geqslant 2$ 归纳证明，或视为题 119 之推论。

(118) 未比赛的两队间连一线，由题 116，117，至多 $[\frac{20^2}{4}]=100$ 线，故至少赛 $C_{20}^2-100=90$ 场。

(119) $(a,b)\in S$，则连点 a，b，得 n 点 m 边图。点 $i(1\leqslant i$

$\leqslant n$）之度记为 d_i。设 ij 为一边，则至少有 $d_i + d_j - n$ 点与 i、j 均相连，即至少有 $d_i + d_j - n$ 个三角形以 ij 为一边，每个三角形恰好计三次，故至少有

$$\triangle = \frac{1}{3}\sum_{(i,j)\in S}(d_i + d_j - n)$$

个三角形。由哥西不等式及定理 1，得

$$\triangle = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{1}{3}mn \geqslant \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2 - \frac{1}{3}mn$$

$$= \frac{4m^2}{3n} - \frac{mn}{3} = 4m\cdot\frac{m - \frac{n^2}{4}}{3n}$$

（120）27

（121）$\frac{1}{\sqrt{3}}$

（124）设多面体有 v 个点，e 条棱，f 个面，由欧拉公式

$$v - e + f = 2$$

由条件得

$$e = \frac{1}{2}v(v-1) \geqslant \frac{3}{2}f$$

故

$$2 \leqslant v - \frac{1}{2}v(v-1) + \frac{1}{3}v(v-1)$$

得　$v \leqslant 4$，从而 $v = 4$。

（126）证 $f_n = ng_{n-1}(n \geqslant 2)$，$f_1 = 1$，

$$g_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

（127）$P_n(k) = C_n^k \cdot g_{n-k}$（$g_{n-k}$ 如题 126）。

（129）对四点的凸包形状分情况讨论。

（130）由题 129，$a \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(131) 对五点的凸包分情况讨论。

(132) 对六点的凸包分情况讨论。

(133) ① 即题 130。

② 设 $\triangle ABC$ 为边长 1 的正三角形，充分接近点 A，B，C 处各取两点，可使 12 个距离属区间 $(1-\varepsilon, 1)$，后半部分由(1)得。

③ 即题 123。

④ 设任两点距离之最小值为 r，以每一点为圆心，$\frac{r}{2}$ 为半径之 $3n$ 个圆，两两不相交，且含在某半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{r}{2}$ 之圆内。故

$$\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2\cdot 3n \leqslant \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{r}{2}\right)^2$$

即

$$r \leqslant \frac{2}{3\sqrt{n}-\sqrt{3}}$$

八 "迟到"的试题及其它

【试题】

题 134 数 1,2,3,4,5 用任意方法分成两组。求证:总可以在某组中找到两个数,它们之差与这一组中的某个数相等。

(匈牙利,1924)

题 135 一个国际社团的成员来自六个国家,共有成员 1978 人。用 1,2,3,…,1977,1978 编号。证明:该社团至少有一个成员的号数与他的两个同胞号数之和相等,或是另一个同胞的号数的两倍。(IMO,20 届)

题 136 把 1,2,3,…,1984,1985 共 1985 个正整数任意地分成 6 组,每一组至少含有一个数。证明:六组中至少有一组具有性质:至少有一个数等于同一组中其它两数之差。

(苏州、镇江,1985)

题 137 求证:把 1,2,3,…,9 任意分成两组,必有一组含三个数,它们成等差数列。(罗马尼亚,1978)

题 138 求证:可把 1,2,…,1986 分成两组,使得任一组不含 18 个成等差数列的数。(匈牙利,1986)

题 139 可把 $M=\{1,2,\cdots,1987\}$ 分成四个两两不交的子集,使得任一个子集中,不存在 10 个成等差的数。

(IMO 备选题,28 届)

题 140 空间中的六点,任三点不共线,任四点不共面,

成对地连接它们得 15 条线段。用红或蓝色染这些线段(一条线段只染一种颜色)。求证:无论如何染色,恒存在同色的三角形。 (普特南,13 届)

题 141 连接圆周上 9 个不同点的 36 条线段,染成红色或蓝色。假定由 9 点中每 3 点所确定的三角形,都至少有一条红色边。证明:存在四点,其中每两点的连线都是红色的。

(加拿大,1976)

题 142 有 17 位科学家,其中每一位和其它各位科学家都通信。在他们的书信往来中仅讨论三个题目,而每两位科学家仅仅讨论一个题目。证明:至少有三位科学家,他们之间互相通信所讨论的是同一个题目。 (IMO,6 届)

题 143 给定 $mn+1$ 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{mn+1}$($0<a_1<a_2<\cdots<a_{mn+1}$),那么,或者可以找到 $m+1$ 个数,使它们中没有一个数能够被另一个数整除,或者可以找到 $n+1$ 个数,使得依照从小到大的顺序排列,除最前面的一个数外,每个数都能被它前面的数整除。 (普特南,27 届)

题 144 在一直线上给出 50 条线段,证明以下结论中至少有一个成立:

(1) 某 8 条线段有公共点;

(2) 可以找到 8 条线段,两两没有公共点。 (全苏,6 届)

题 145 平面上有五个点,其中任三点不共线。求证:必存在四点,它们是一个凸四边形的顶点。

(普特南,23 届;莫斯科,1947)

题 146 在一平面上给定 n 个点,其中 $n>4$,且无三点在同一直线上。求证:至少可以找到 C_{n-3}^{2} 个以上述已知点为顶点的凸四边形。 (IMO,11 届)

题 147 正方形 A_1,A_2,A_3,A_4 内有凸四边形 $A_5A_6A_7A_8$，在四边形 $A_5A_6A_7A_8$ 内取一点 A_9，如果九个点 $A_1,A_2,\cdots,A_9$ 中任三点不共线。求证：从中可选出五个点，它们是一个凸五边形的顶点。 （莫斯科，1947）

【背景】

舒尔(Schur，1875 — 1941) 于 1916 年证明：任给一个正整数 n，存在整数 f，使得把 $1,2,3,\cdots,f$ 任意分成 n 类，必有一类存在三个(不必不同的) 整数 x,y,z，满足 $x+y=z$。

f 的最小值记为 S_n，称为舒尔数。

现在已得到：

$S_2=5$(题 134)，$S_3=14$，$S_4=45$，$S_5\leqslant 326$，$S_6\leqslant 1957$。

题 135(1978 年提出的试题)，题 136(1985 年提出的试题) 中，命题者巧妙地把年份数 1978、1985 嵌入试题中。由 $S_6\leqslant 1957$ 可知，这两道题可谓是“迟到”的试题 —— 在 1957 年就可以提出类似的问题为试题，同时，把 1957 取代这两道题中的数 1978 与 1985。

当代数学家保德(Baudet) 还在哥庭根大学当学生时就提出猜测：正整数集任意分成两类，必有一类含任意多个数，它们组成等差数列。

范德瓦尔登(Van der Waerden) 于 1927 年证明了上述猜测，甚而证明了：任给正整数 m,n，存在整数 f，使得把 $1,2,\cdots,f$ 任意分成 n 类，必有一类含 m 个数成等差数列。f 的最小值记为 $W(m,n)$，称为范德瓦尔登数。

现在，已得

$W(3,2)=9$(题 137)，$W(4,2)=35$，$W(3,3)=27$，

$W(3,4) = 76, W(5,2) = 178$。

题 138 表明 $W(18,2) > 1986$，现已证明：$W(18,2) \geqslant 17 \times 2^{17}$，此题可谓是"早到"的试题。

题 139 表明 $W(10,4) > 1987$。

英国当代逻辑学家、哲学家、经济学家拉姆赛（Ramsey）证明：对任何正整数 $m, n \geqslant 2$，存在正整数 f，使得空间中 f 个点，任四点不共面，两两连接这些点的线段染上红或绿两色，则或者有 m 点，两两之间线段染红色，或者有 n 点，两两之间线段染绿色。

f 的最小值记为 $R(m,n)$，称为拉姆赛数。

现在已知 $R(3,3) = 6$（题 140），$R(3,4) = 9$（题 141），$R(3,5) = 14, R(3,6) = 18, R(3,7) = 23, R(4,4) = 18$。

拉姆赛问题有多种推广。比如：对任何正整数 n，存在正整数 f，使得空间中 f 个点，任四点不共面，两两连接这些点的线段染上 n 种颜色之一，则必有三点，两两之间连线同色。

f 的最小值记为 R_n。

现在已知 $R_2 = R(3,3) = 6, R_3 = 17$（题 142）

题 143，144 即艾道斯（Erdős）- 捷科斯（Szekeres）定理。

当代数学家艾道斯与捷科斯夫妇证明了：对任何正整数 $n \geqslant 3$，存在正整数 f，使得平面上任意 f 个点，当任三点不共线时，必存在 n 个点，它们是某个凸 n 边形的顶点。

f 的最小值记为 E_n。

现在已知 $E_3 = 3, E_4 = 5$（题 145），$E_5 = 9$（题 147 为其特殊情况），$E_6 = 17$。

艾道斯与捷科斯夫妇猜测：$E_n = 2^{n-2} + 1$。此猜测至今还未获证。

本节中的舒尔数，范德瓦尔登数，拉姆赛数及 E_n 的确定都是组合论中很难的问题。较简单的情况与较弱的结论常可做为竞赛题。

【解答】

（134）由抽屉法则，至少有三数 a_1, a_2, a_3 在同一组。设 $a_1 < a_2 < a_3$，若 $a_2 - a_1, a_3 - a_1, a_3 - a_2$ 有一个在此组，则此组有两数之差与这组中某数相等。否则，此三数同在另一组。因 $(a_3 - a_1) - (a_3 - a_2) = a_2 - a_1$，故另一组有两数之差与这一组中某数相等。

（135）由抽屉法则，某国家，记为 A_1，至少有 $[\frac{1977}{6}] + 1 = 330$ 人，编号 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{330}$。若 $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \cdots, a_{330} - a_1$ 为 A_1 某成员之编号，得证。否则是另五国家成员之编号，必有某国，记为 A_2，至少有其中 $[\frac{328}{5}] + 1 = 66$ 人，编号 $b_1 < b_2 < \cdots < b_{66}$。若 $b_2 - b_1, b_3 - b_1, \cdots, b_{66} - b_1$ 为 A_1 或 A_2 某成员之编号，得证。否则，是另四国成员之编员，必有某国，记为 A_3，至少有 $[\frac{64}{4}] + 1 = 17$ 人，编号 $c_1, c_2, \cdots, c_{17}$。若 $c_2 - c_1, c_3 - c_1, \cdots, c_{17} - c_1$ 为 A_1、A_2 或 A_3 某成员编号，得证。否则，是另三国成员编号，必有某国，记为 A_4，至少有其中 $[\frac{15}{3}] + 1 = 6$ 人，编号 $d_1 < d_2 < \cdots < d_6$，若 $d_2 - d_1, d_3 - d_1, \cdots, d_6 - d_1$ 为 A_1、A_2、A_3 或 A_4 某成员编号，得证。否则，是另两国成员编号，必有某国，记为 A_5，至少有 $[\frac{4}{2}] + 1 = 3$ 人，编号 $e_1 < e_2 < e_3$，若 $e_2 - e_1, e_3 - e_1$ 为 A_1、A_2、A_3、A_4 或 A_5 之成员编号，得证。

否则，均为另一国 A_6 成员编号。$e_3 - e_2$ 必为某国成员编号，此国含要求的成员。

(136) 同上。

(137) 分情况讨论。

(138) 1986 个数分成两组，共有 $2^{1986}-1$ 种分法。某组有 18 个数成等差数列：$a, a+d, \cdots, a+17d (d>0)$ 当且仅当 $1 \leqslant a \leqslant 1969, 1 \leqslant d \leqslant \frac{1986-a}{17}$。

对于每一对 a、d，分法数不超过 2^{1969} 种，故有 18 个数成等差的分法数不超过

$$
\begin{aligned}
& 2^{1969}\sum_{a=1}^{1969}\left[\frac{1986-a}{17}\right] \\
& = 2^{1969}[17(1+2+\cdots+115)+14\times 16] \\
& = 2^{1969}\times 115014 < 2^{1986}-1。
\end{aligned}
$$

(139) 如上。本题之 1987 可改为 2176；上题之 1986 可改为 2119。故此两题可谓"早到"的试题。

(140) 由抽屉法则，由一点 A 引出的五线中必有三线，记为 AB，AC，AD 同色，设为红色。若 BC，BD、CD 至少一边染红，得红三角形，否则得 BCD 是蓝三角形。

(141)、(142) 如上。

(143) $mn+1$ 个数中，从 a_i 开始，从小到大排列。除 a_i 外，每个数能被它前面的数整除，含的最多的数的个数记为 $f(i)$。$mn+1$ 个数 $f(1), f(2), \cdots, f(mn+1)$ 中如有 $\geqslant n+1$ 的数，则得证。否则，每个数均取 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个值之一，由抽屉法则，必有 $m+1$ 个数取相同的值，这 $m+1$ 个数中没有一个能被另一个整除。

(144) 设 50 条线段是 $[a_i, b_i](1 \leqslant i \leqslant 50)$，$b_1$ 是 b_i 中最小

的，若 b_1 在其余至少 7 条线段中，得证。否则，至少有 43 条线段在 $[a_1,b_1]$ 之右边。设 b_2 是这些线段的 b_i 中最小的，若 b_2 在其余至少 7 条线段中，得证。否则，至少有 36 条线段在 $[a_2,b_2]$ 之右边。依此下去，或得 8 条线段有公共点，或得 8 个两两无公共点之线段 $[a_1,b_1]$，$[a_2,b_2]$，…，$[a_8,b_8]$。

(146) 任取三点构成三角形，设 $\triangle ABC$ 是其中面积最大的一个，$n-3$ 点中任取两点，这两点与 A，B，C 中两点成凸四边形。取 $n=5$ 得题 145。

(147) 分情况讨论：

① A_5，A_6，A_7，A_8 中某两点连线与 $A_1A_2A_3A_4$ 之一组邻边相交；

② A_5，A_6，A_7，A_8 中任两点连线均与 $A_1A_2A_3A_4$ 之对边相交。

九 富饶的不等式海洋

【试题】

题 148 设 a、b、c、d 是正数，并且它们的乘积等于 1。证明：

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd\geqslant 10$$

（全俄，2 届；陕西，1979）

题 149 设 n 为自然数，对任意实数 x,y,z，恒有

$$(x^2+y^2+z^2)^2\leqslant n(x^4+y^4+z^4)$$

成立，则 n 之最小值是多少？（全国联赛，1990）

题 150 设 a,b,c 都是正数，且 $a+b+c=1$。证明：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$（广东，1978）

题 151 设 $a,b,c>0$，且 $abc=1$，求证：

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$$

（IMO，36 届）

题 152 若数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$，其中 $0<a<b$，求证：

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

$$\leqslant\frac{(a+b)^2}{4ab}\cdot n^2$$

（全苏，12 届）

题 153　设 $a<b<c$，且 $x<y<z$，下列四个代数式中，值最大的一个是(　　)

(A) $ax+by+cz$　　(B) $ax+cy+bz$

(C) $bx+ay+cz$　　(D) $bx+cy+az$

（福建，1983 初中）

题 154　设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的某一个排列。求证：

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n$$

（匈牙利，1934）

题 155　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两不同的自然数，则

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}$$

（IMO，20 届）

题 156　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正数，求证：

$$\frac{x_1^{\ 2}}{x_2}+\frac{x_2^{\ 2}}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^{\ 2}}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$$

（全国联赛，1984）

题 157　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数，证明不等式

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\geqslant n$$

（莫斯科，1940）

题 158　设 $a>b>c>0$，求证：

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

（全俄，20 届）

题 159　设 $x_i,y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是实数，且 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$，$y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n$，$z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的一个排列。求证：

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2$$

（IMO，17 届）

题 160　设 $a>b>c>0$，求证：

$a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$　　（上海，1978）

题 161　若 a,b,c 是正数，则

$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$　　（美国，3 届）

题 162　n 为正整数，a、b 为给定的实数，$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为实数，$\sum_{i=0}^{n}x_i=a$，$\sum_{i=0}^{n}x_i^2=b$，试确定 x_0 的变化范围。

（IMO 备选题，30 届）

题 163　设 u、$v\geqslant 0$，求 u，v 所需满足的充分必要条件，使得对给定的 n，存在实数满足

$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$，

$a_1+a_2+\cdots+a_n=u$，　$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=v$

当这些数存在时，求 a_1 的最大值与最小值。

（加拿大，1989，集训队）

题 164　设 x、y、z 都是实数，满足条件

$$x+y+z=a,x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}(a>0)$$

证明：x、y、z 都不能是负数，也都不能大于 $\frac{2}{3}a$，也不能同时相等。　　（北京，1957；合肥，1990 初中）

题 165　求最大实数 z，使得 $x+y+z=5$，$xy+yz+zx=3$，并且 x，y 也是实数。　　（加拿大，1978）

题 166　设 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d>0$，$a+b+c+d=4$，$a^2+b^2+c^2+d^2=8$，求 a 的最大值。　（加拿大，1989，集训队）

题 167　设 a、b、c、d、m、n 是正整数，

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1989,\ a+b+c+d=m^2,$$

$\max(a,b,c,d)=n^2$，确定（并予以证明）m、n 的值。

（IMO 备选题，30 届）

题 168　设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_8$，$a_1+a_2+\cdots+a_8=8x$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_8^2=8y$，求证：

$$2\sqrt{y-x^2}\leqslant a_8-a_1\leqslant 4\sqrt{y-x^2}$$

（IMO 备选题，31 届）

题 169　设 a、b、c、d、e 是实数，且

$$a+b+c+d+e=8,\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16,$$

求 e 的最大值。　　（美国，1978）

题 170　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$ 是 n 个互不相同的实数，$S=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，$M=\min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2$

求证：$\dfrac{S}{M}\geqslant\dfrac{n(n^2-1)}{12}$　　（冬令营，1990）

题 171　设 $0<\alpha<\pi$，求证：

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin2\alpha+\frac{1}{3}\sin3\alpha>0$$

（匈牙利，1951）

题 172　设 $a_1,a_2,a_3\geqslant 0$，$a_1+a_2+a_3=1$，$0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$。求证：成立下面的不等式

$$(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3\lambda_3)\left(\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_2}{\lambda_2}+\frac{a_3}{\lambda_3}\right)\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_3}$$

（北京，1979）

题 173　已知 a、b、c 是三角形的三边长，$\triangle$ 是上述三角形的面积。求证：

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\triangle$$

并求出在什么条件下等号成立？　　（IMO，3 届）

题 174　设 a、b、c、$\triangle$ 分别是同一个三角形的三边长和面积。求证不等式

$$(a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\triangle)(a^2+b^2+c^2)$$
$$\geqslant 2[a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2]$$

（IMO 备选题，31 届）

【背景】

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数，

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

$$H=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

分别称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均值，几何平均值与调和平均值。

定理 1 （平均不等式） $A\geqslant G\geqslant H$，等号成立，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$。

更一般的，设

$$M_\lambda=\left(\frac{a_1^\lambda+a_2^\lambda+\cdots+a_n^\lambda}{n}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

约定

$$M_0=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

定理 2 （幂平均不等式） 若 $\lambda>\mu$，则 $M_\lambda\geqslant M_\mu$，等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$。

题 148—151 为上述二定理的直接应用。

定理 3 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为实数，则

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$
$$\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \qquad (1)$$

等号成立，当且仅当存在不全为零的实数 λ,μ 使得

$\lambda a_i = \mu b_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$

不等式(1)又称哥西(Cauchy,1789 — 1857)-施瓦兹(Schwarz,1843——1921)不等式。

题 152　基于波利亚(Polya,1887 —?)与塞果(Szego,1895 —?)对(1)右式的另一估计。

定理 4　(**波利亚-塞果**)　设 $0 < m_1 \leqslant a_k \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant b_k \leqslant M_2 (k = 1,2,\cdots,n)$,则

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \leqslant \frac{1}{4}\left\{\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}} + \sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}\right\}^2 (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

题 153—161 均为下述排序不等式的直接应用。

定理 5　(**排序不等式**)　设 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n; y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n, z_1, z_2, \cdots z_n$ 为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 之一排列,则

$$\begin{aligned} & x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1 \\ \leqslant & x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n \\ \leqslant & x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \end{aligned}$$

题 162—169 与拉格尔(Laguerre,1834 — 1886)不等式有密切的联系。

定理 6　(**拉格尔**)　设 $n \geqslant 2, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = q$,则

$$\frac{p}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{nq - p^2}{n-1}} \leqslant x_k \leqslant \frac{p}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{nq - p^2}{n-1}}$$

题 170 即米特里诺维奇(Mitrinovic)不等式。

题 171 是费叶尔(Fejér 1880 — 1959)不等式的特殊情

况。

定理 7 （费叶尔） 对任何正整数 n 及 $x\in(0,\pi)$，恒有

$$\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{1}{n}\sin nx>0$$

题 172 是康托洛维奇（Л. В. Канторович，1912－ ）不等式的特殊情况。

定理 8 （康托洛维奇） 设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$，则

$$(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n)(\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_2}{\lambda_2}+\cdots+\frac{a_n}{\lambda_n})$$
$$\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}$$

题 173，又称魏金伯克（Weitjenbock）不等式。当代数学家芬斯勒（Finsler）与哈维格（Hadwiger）推广为

$$a^2+b^2+c^2$$
$$\geqslant 4\sqrt{3}\triangle+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

应用此不等式得题 174。

【解答】

（148）由平均不等式立得。

（149）n 之最小值是 3。

（150）由平均不等式得

$$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc},\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

故 $$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant 9$$

即得 $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$$

（151）由哥西——施瓦兹不等式

$$\left[\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\right]$$

$$[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

又 $abc=1$

故 $$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}$$

（152）证一般的波利亚——塞果不等式。因

$$\left(\frac{m_2}{M_1}+\frac{M_2}{m_1}\right)a_kb_k-b_k^2-\frac{m_2M_2}{m_1M_1}a_k^2$$

$$=\left(\frac{b_k}{a_k}-\frac{m_2}{M_1}\right)\left(\frac{M_2}{m_1}-\frac{b_k}{a_k}\right)a_k^2\geqslant 0$$

故

$$\left(\frac{m_2}{M_1}+\frac{M_2}{m_1}\right)\sum a_kb_k\geqslant\sum b_k^2+\frac{m_2M_2}{m_1M_1}\sum a_k^2$$

$$=\left[\left(\sum b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{m_2M_2}{m_1M_1}\sum a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2+2\left(\frac{m_2M_2}{m_1M_1}\sum a_k^2\sum b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\geqslant 2\left(\frac{m_2M_2}{m_1M_1}\sum a_k^2\sum b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

两边平方得证。

（153）选 A

（154—159）直接利用排序不等式。

（160）由排序不等式，得

$$a\lg a + b\lg b + c\lg c > b\lg a + c\lg b + a\lg c$$

$$a\lg a + b\lg b + c\lg c > c\lg a + a\lg b + b\lg c$$

则　$a^a b^b c^c > a^b b^c c^a$，$a^a b^b c^c > a^c b^a c^b$

两式相乘得证。

(161) 实质同题 160。

(162) 证一般的拉格尔不等式。由哥西－施瓦兹不等式

$$(x_2 + x_3 + \cdots + x_n)^2 \leqslant (n-1)(x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2)$$

故

$$(p - x_1)^2 \leqslant (n-1)(q - x_1^2)$$

即　$nx_1^2 - 2px_1 + p^2 - (n-1)q \leqslant 0$

令　$\triangle = 4(n-1)(nq - p^2)$

当 $\triangle < 0$ 时，实数 x_1 不存在，当 $\triangle \geqslant 0$ 时，得

$$\frac{p}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{nq-p^2}{n-1}} \leqslant x_1 \leqslant \frac{p}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{nq-p^2}{n-1}}$$

对 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 同理可证。

(163) $nv \geqslant u^2 \geqslant v$

$$\max a_1 = \frac{1}{n}[u + \sqrt{(n-1)(nv-u^2)}]$$

$$\min a_1 =$$

$$\begin{cases} \dfrac{u}{n}, & \text{当 } nv = u^2 \text{ 时；} \\ \dfrac{ku + \sqrt{k(k+1)v - u^2}}{k(k+1)}, & \text{当 } \dfrac{u^2}{k} \geqslant v > \dfrac{u^2}{k+1} \text{ 时。} \end{cases}$$

(165) $\dfrac{13}{3}$

(166) $1 + \sqrt{3}$

(167) $m = 9, n = 6$ ($a = 12, b = 15, c = 18, d = 36$)。

(169) $\frac{16}{5}$

(170) 考虑 $a_1 < a_2 < \cdots < a_j < 0 \leqslant a_{j+1} < a_{j+2} < \cdots < a_n$，$\min\limits_{(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)} (a_i - a_j)^2 = M$ 时，$S = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 的最小值。

S 达到最小值，则

$$a_{i+1} = a_i + \sqrt{M} \quad (i = 1,2,\cdots,n-1)$$

$$j = [\frac{n}{2}],\ 0 \leqslant a_{j+1} < \sqrt{M}$$

记 $a_{j+1} = t$，当 $n = 2k$ 为偶数时，$j = k$，

$$S = 2kt^2 - 2k\sqrt{M}t + \frac{1}{3}k(2k^2+1)M$$

$$\geqslant \frac{1}{6}k(4k^2-1)M = \frac{1}{12}n(n-1)(n+1)M。$$

当 $n = 2k+1$ 为奇数时，$j = k$，

$$S = nt^2 + \frac{k(k+1)(2k+1)}{3}M$$

$$\geqslant \frac{k}{3}(k+1)(2k+1)M = \frac{1}{12}n(n-1)(n+1)M$$

(171) 利用倍角公式与三倍角公式，

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha$$

$$= \frac{1}{3}\sin\alpha(4\cos^2\alpha + 3\cos\alpha + 2) > 0$$

(172) 由 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ 得 $a_2 + a_3 = 1 - a_1$，故 $a_1(a_2 + a_3) = a_1(1 - a_1) \leqslant \frac{1}{4}$，即 $a_1a_2 \leqslant \frac{1}{4} - a_1a_3$，同理，$a_2a_3 \leqslant \frac{1}{4} - a_1a_3$。

另一方面，

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3}+\frac{\lambda_3}{\lambda_1}-2=(\lambda_3-\lambda_1)(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_3})$$

$$=[(\lambda_3-\lambda_2)+(\lambda_2-\lambda_1)][(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2})+(\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_3})]$$

$$\geqslant(\lambda_3-\lambda_2)(\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_3})+(\lambda_2-\lambda_1)(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2})$$

$$=(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_3}-2)+(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-2)$$

故

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_3}-(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3\lambda_3)(\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_2}{\lambda_2}+\frac{a_3}{\lambda_3})$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_3}-(a_1+a_2+a_3)^2-a_1a_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-2)$$

$$-a_2a_3(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_3}-2)-a_1a_3(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}+\frac{\lambda_1}{\lambda_3}-2)$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}+\frac{\lambda_3}{\lambda_1}-2)-a_1a_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-2)$$

$$-a_2a_3(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_3}-2)-a_1a_3(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}+\frac{\lambda_1}{\lambda_3}-2)$$

$$\geqslant(\frac{1}{4}-a_1a_3)(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}+\frac{\lambda_3}{\lambda_1}-2)$$

$$-(\frac{1}{4}-a_1a_3)(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-2)$$

$$-(\frac{1}{4}-a_1a_3)(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_3}-2)\geqslant 0$$

(173) $\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\leqslant\sqrt{p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{3}}p^2=\frac{1}{12\sqrt{3}}(a+b+c)^2$$

$$\leqslant \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)$$

等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立。

(174) 先证芬斯勒—哈维格不等式

$$a^2+b^2+c^2$$
$$\geqslant 4\sqrt{3}\triangle+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\triangle$$
$$=2(a^2+c^2)-2ac\cos B-2\sqrt{3}ac\sin B$$
$$=2(a-c)^2+4ac\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-B\right)\right)\geqslant 2(a-c)^2$$
$$=(a-c)^2+[(a-b)+(b-c)]^2$$
$$\geqslant(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

得芬斯勒—哈维格不等式.等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立。

利用上述不等式,本题等价于

$$[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2](a^2+b^2+c^2)$$
$$\geqslant 2[a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2]$$

化简即

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)$$
$$+c^2(c-a)(c-b)\geqslant 0$$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,记 $a-b=\alpha,b-c=\beta$,则

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)$$
$$+c^2(c-a)(c-b)$$
$$=a^2\alpha^2+(a^2-b^2+c^2)\alpha\beta+c^2\beta^2\geqslant 0$$

证毕。

十 整数表示种种

【试题】

题 175 大于 7 公斤的任何一种整公斤数的重量都可以用 3 公斤和 5 公斤的两种法码来称，而用不着添其它不同重量的法码。试用数学归纳法加以证明。

（重庆，1978；波兰，6 届）

题 176 8 分和 15 分的邮票可以无限制地取用，某些邮资额数，比如 7 分，29 分不能够刚好凑成。求不能凑成的最大额数 n，即大于 n 的额数都能够凑成。并证明你的答案。

（加拿大，1974）

题 177 设 a、b、c 是两两互素的正整数，证明 $2abc-ab-bc-ca$ 是不能表示为 $xbc+yca+zab$ 形式的最大整数，其中 x、y、z 是非负整数。（IMO，24 届）

题 178 设 x、y 是正无理数，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，则数列 $[x]$，$[2x]$，…，$[nx]$，… 与 $[y]$，$[2y]$，…，$[my]$，… 包含了全体正整数，且每一个正整数仅在其中一个数列中出现一次。

（普特南，20 届）

题 179 全体正整数集是两个不相交的子集 $\{f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots\}$ 与 $\{g(1),g(2),\cdots,g(n),\cdots\}$ 的并集，其中

$f(1) < f(2) < \cdots < f(n) < \cdots,$

$g(1) < g(2) < \cdots < g(n) < \cdots$

且对所有的 $n \geqslant 1$，$g(n) = f(f(n)) + 1$。

求 $f(240)$ （IMO，20 届）

题 180 试证：对于任何给定的正整数 n，必有唯一的一对整数 k 与 l，$0 \leqslant l \leqslant k$，使得 $n = \frac{1}{2}k(k-1) + l$

（北京，1964）

题 181 求证：任何偶数 $2n$ 都可以唯一地表示成

$2n = (x+y)^2 + 3x + y$，

其中 x、y 是非负整数。 （莫斯科，1964）

题 182 求二重级数

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-3i-j-(i+j)^2}$$

的和。 （普特南，21 届）

【背景】

弗罗贝纽斯(Frobenius，1849 — 1917) 证明了下述定理：设 $a, b, \cdots, l$ 是最大公约数为 1 的正整数，则存在整数 f，使得

(i) 当整数 $n > f$ 时，方程

$$ax + by + \cdots + lw = n \tag{1}$$

有非负整数解$(x, y, \cdots, w)$；

(ii) 当 $n = f$ 时，方程(1) 无非负整数解。

我们称 f 为关于整数 $a, b, \cdots, l$ 的弗罗贝纽斯数。f 是不能用 $a, b, \cdots k, l$ 的非负整数的线性组合表示的最大整数。

定理 1 若$(a, b) = 1$，则关于 a, b 的弗罗贝纽斯数是 ab

$-a-b$。

定理 2　若 a,b,c 两两互素，则关于 bc,ca,ab 的弗罗贝纽斯数是 $2abc-bc-ca-ab$。

题 175，176 来自定理 1，题 177 来自定理 2。

题 178　即贝蒂(Beatty)定理。题 179 显然源于这个定理。

题 180　即整数的一个唯一性表示定理，题 181 是其一变换形式，题 182 是这一定理的应用。

【解答】

(175) 由定理 1，得 $f=3\times5-3-5=7$。

(176) 由定理 1，得 $n=8\times5-8-15=97$。

定理 1 证明如下：

当 $n\geqslant ab-a-b+1$ 时，因 $(a,b)=1$，$n,n-a,n-2a,\cdots,n-(b-1)a$ 是 $[-(b-1),n]$ 中 b 个两两关于 $\bmod b$ 不同余的整数，故恰有一个是 b 的倍数。设这个数是 $n-xa=yb\geqslant-(b-1)$，则 x,y 是非负整数，即 n 可表示为 a、b 的非负整数的线性组合。

当 $n=ab-a-b$ 时，若 $ax+by=n=ab-a-b$，且 x、y 是非负整数，则 $b(y+1)=a(b-1-x)$。因 $(a,b)=1$，故 $y+1$ 是 a 的倍数，得 $y\geqslant a-1$。同理 $x\geqslant b-1$，故 $ab-a-b\geqslant a(b-1)+b(a-1)=2ab-a-b$，从而 $ab\leqslant0$，矛盾。

(177) 当 $n\geqslant2abc-bc-ca-ab+1$ 时，因 a,b,c 两两互素，故 $n-(ab-a-b+1)c,n-(ab-a-b+2)c,\cdots,n-(2ab-a-b)c$ 这 ab 个数是两两关于 $\bmod ab$ 不同余的数，

故恰有一个是 ab 的倍数，设这个数是

$$n-uc=zab\geqslant n-(2ab-a-b)c\geqslant -(ab-1)$$

则 z 是非负整数，$u\geqslant ab-a-b+1$。由定理 1，存在非负整数，使得

$$bx+ay=u$$

故

$$n=xbc+yca+zab$$

当 $n=2abc-bc-ca-ab$ 时，若 $xbc+yca+zab=n$，x,y,z 是非负整数，则

$$bc(x+1)+ca(y+1)+ab(z+1)=2abc$$

故 $x+1,y+1,z+1$ 分别是 a,b,c 的倍数，从而 $x+1\geqslant a$，$y+1\geqslant b,z+1\geqslant c$。这样

$$2abc\geqslant bca+cab+abc=3abc$$

从而 $abc\leqslant 0$，矛盾。

(178) 因 $x,y>0,\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$，故 $x>1,y>1$，则数列 $\{[nx]\}$ 与 $\{[ny]\}$ 都是严格递增的正整数数列。

(i) 若两数列都不含正整数 k，则存在正整数 m、n，使得

$$[(m-1)x]\leqslant k-1,\quad k+1\leqslant[mx]$$

$$[(n-1)x]\leqslant k-1,\quad k+1\leqslant[ny]$$

因 mx,ny 均为无理数，必是非整数，故

$$(m-1)x<k\qquad k+1<mx$$

$$(n-1)y<k\qquad k+1<ny$$

即

$$\frac{m-1}{k}<\frac{1}{x}<\frac{m}{k+1},\quad \frac{n-1}{k}<\frac{1}{y}<\frac{n}{k+1}$$

因 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，故

$$\frac{m-1}{k}+\frac{n-1}{k}<1<\frac{m}{k+1}+\frac{n}{k+1}$$

即 $$k+1<m+n<k+2$$

矛盾，因为 $k+1$ 与 $k+2$ 之间无整数 $m+n$ 存在。

(ii) 若两数列都含正整数 k，则存在正整数 m，n，使得

$$[mx]=[ny]=k$$

因 mx、ny 均为无理数，故

$$k<mx<k+1 \qquad k<ny<k+1$$

即

$$\frac{m}{k+1}<\frac{1}{x}<\frac{m}{k} \qquad \frac{n}{k+1}<\frac{1}{y}<\frac{n}{k}$$

因 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，得

$$\frac{m}{k+1}+\frac{n}{k+1}<1<\frac{m}{k}+\frac{n}{k}$$

即

$$k<m+n<k+1$$

矛盾。

(179) 由 178 可猜想：存在正无理数 α，β，使得

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1,\ f(n)=[\alpha n],\ g(n)=[\beta n]$$

由 $g(n)=f(f(n))+1$，得

$$[\beta n]=[\alpha[\alpha n]]+1$$

两边除以 n，令 $n\to+\infty$，得

$$\beta=\alpha^2$$

故

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

若证得 $f(n) = [\alpha n]$,则得

$$f(240) = [240\alpha] = 388$$

下面证 $f(n) = [\alpha n],\ g(n) = [\beta n]$

由已知条件 $g(1) > 1$,故 $f(1) = 1, g(1) = f(f(1)) + 1 = 2$。

若 $f(1), f(2), \cdots, f(n)$; $g(1), g(2), \cdots, g(n)$ 已确定,因 $g(n+1) = f(f(n+1)) + 1 \geqslant f(n+1) + 1$,故 $f(n+1)$ 是不在 $f(1), f(2), \cdots, f(n)$; $g(1), g(2), \cdots, g(n)$ 中的最小正整数,从而 $f(n+1), g(n+1)$ 也确定,即满足给定条件的两子集至多唯一,这时,只须证:当 $n \geqslant 1$ 时,$[\beta n] = [\alpha[\alpha n]] + 1$

设 $\alpha n = [\alpha n] + r \quad 0 < r < 1$,则

$\beta n = (\alpha + 1)n = [\alpha n] + n + r$,得

$$\begin{aligned}[\beta n] - [\alpha[\alpha n]] - 1 &= [\beta n] - [\alpha(\alpha n - r)] - 1 \\ &= [\beta n] - [\beta n - \alpha r] - 1 \\ &= -[(1-\alpha)r] - 1\end{aligned}$$

因为 $1 < -\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < (1-\alpha)r < 0$

故 $[(1-\alpha)r] = -1$

从而

$$[\beta n] = [\alpha[\alpha n]] + 1$$

(180) 对任何正整数 n,存在整数 k,使得

$$\frac{1}{2}k(k-1) \leqslant n \leqslant \frac{1}{2}k(k+1) - 1$$

取 $\quad l = n - \frac{1}{2}k(k-1)$，则 $l \geqslant 0$，且

$$l \leqslant \frac{1}{2}k(k+1) - 1 - \frac{1}{2}k(k-1) = k - 1$$

得存在性。

若

$$\frac{1}{2}k(k-1) + l = \frac{1}{2}k'(k'-1) + l'$$

$$0 \leqslant l < k \qquad 0 \leqslant l' \leqslant k'$$

当 $k \neq k'$ 时，不妨设 $k+1 \leqslant k'$，则

$$l = \frac{1}{2}k'(k'-1) + l' - \frac{1}{2}k(k-1)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}k(k+1) - \frac{1}{2}k(k-1) = k$$

矛盾。当 $k = k'$ 时，则 $l = l'$，得唯一性。

(181) 取 $k = x + y + 1, l = x$，由题 180，得

$$\begin{aligned} 2n &= k(k-1) + 2l = (x+y+1)(x+y) + 2x \\ &= (x+y)^2 + (x+y) + 2x \\ &= (x+y)^2 + 3x + y \end{aligned}$$

(182) 由题 181，得

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} = \frac{4}{3}$$

十一 兔子问题尾巴长
——菲波那契数列

【试题】

题 183 用1和2两种数字写 n 位数，其中任意相邻的两位不全是1，记这种 n 位数的个数为 $f(n)$，那么 $f(10)=$ ________。（杭州，求是杯，第3届）

题 184 证明 A、B、C 相等，这儿

$A=$ 用 2×1 的矩形覆盖 $2\times n$ 的矩形的方法数；

$B=$ 用1与2组成的和为 n 的数列的个数；

$$C=\begin{cases}C_m^0+C_{m+1}^2+C_{m+2}^4+\cdots+C_{2m}^{2m}, & \text{当 } n=2m \text{ 是偶数时；}\\ C_{m+1}^1+C_{m+2}^3+C_{m+3}^5+\cdots+C_{2m+1}^{2m+1}, & \text{当 } n=2m+1 \text{ 是奇数时。}\end{cases}$$

（IMO 备选题，29届）

题 185 已知数列

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，… 中，从第三项起，每一项等于它前面两项之和。问：在这个数列的前 100 000 001 项中，是否能找到以4个零结尾的数？（莫斯科，1946）

题 186 给定菲波那契数列 1，2，3，5，8，13，…。求证：任

意相邻 8 项之和不是数列中的一项。　　（莫斯科，1956）

题 187　非波那契数列定义为：$a_0=0, a_1=a_2=1, a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n\geqslant 1)$。求 a_{1960} 与 a_{1988} 的最大公约数。

（IMO 备选题，29 届）

题 188　设 $g(n)$ 定义如下：

$g(1)=0, g(2)=1, g(n+2)=g(n)+g(n+1)+1$ $(n\geqslant 1)$。

求证：若 $n(>5)$ 为素数，则 n 整除 $g(n)(g(n)+1)$。

（IMO 备选题，29 届）

题 189　给定数列：$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 满足 $u_1=u_2=1, u_{n+2}=u_{n+1}+u_n(n\geqslant 1)$。求证：$u_{5k}$ 能被 5 整除，其中 $k=1,2,\cdots$。

（莫斯科，1961）

【背景】

本节问题都是关于非波那契数列 $\{f_n\}$：

$$f_1=f_2=1$$

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \qquad (n\geqslant 1)$$

这个数列是非波那契考虑兔子的繁殖问题而提出来的。（见本丛书的《数学宫趣游》）

这个数列历经近千年的研究而不衰，因为它有许许多多美妙的性质与重要的应用。美国数学家霍盖特（V. Hoggatt，1921 － 1980）与伯劳瑟（A. Brousseau，1907 － 1988）于 1963 年特别创办了一个专门发表关于非波那契数列的期刊《非波那契季刊》。他们还发起组织了一个国际性的“非波那契学会”，定期召开“非波那契数及应用的国际会议”。迄今为止，已召开了六届这样的会议。它的性质与应用也以多种形式演化

成各种数学竞赛题。

【解答】

(183) 显然，$f(1)=2$，$f(2)=3$。当 $n\geqslant 3$ 时，第一位取1，则第二位必取2，从第三位起到第 n 位的取法有 $f(n-2)$ 种；当第一位取2，则第二位起到第 n 位取法有 $f(n-1)$ 种，故

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

从而 $f(3)=5$，$f(4)=8$，$f(5)=13$，$f(6)=21$，$f(7)=34$，$f(8)=55$，$f(9)=89$，$f(10)=144$。

(184) 相应于 n 的 A、B、C 之值记为 A_n，B_n，C_n，则 A_n，B_n，C_n 均满足递推式：

$$f_1=1,\quad f_2=2$$

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n\quad(n\geqslant 1)。$$

(185) 能找到。

利用数学归纳法证明：非波那契数列 $\{f_n\}$ 的通项是

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}(C_n^1+5C_n^3+25C_n^5+125C_n^7+625C_n^9+\cdots)$$

故 f_n 能被 $5^4=625$ 整除，当且仅当 n 能被 625 整除。

对 f_n 取 mod16，得 f_n 能被 16 整除，当且仅当 n 能被 12 整除。故当且仅当 n 能被 $625\times 12=7500$ 整除时，f_n 能被 $10^4=10000$ 整除，即以 4 个零结尾。

(186) 利用数学归纳法证明：

$$f_1+f_2+\cdots+f_n=f_{n+2}-1$$

故菲波那契数列的相邻 8 项之和为

$$f_{n+8}-f_n$$

因为

$$f_{n+8}>f_{n+8}-f_n=f_{n+7}+f_{n+6}-f_n>f_{n+7}$$

故

$f_{n+8}-f_n$ 不是数列中的一项。

(187) 利用数学归纳法证明:

$(a_n,a_{n+1})=1 \quad (n\geqslant 0)$

$a_m=a_na_{m-n+1}+a_{n-1}a_{m-n}(m\geqslant n)$

故当 $m>n$ 时

$$\begin{aligned}(a_m,a_n)&=(a_na_{m-n+1}+a_{n-1}a_{m-n},a_n)\\&=(a_{n-1}a_{m-n},a_n)\\&=(a_{m-n},a_n)\end{aligned}$$

由辗转相除法,得

$$(a_m,a_n)=a_{(m,n)}$$

故

$(a_{1960},a_{1988})=a_{(1960,1988)}=a_{28}=317811$

(188) 显然 $g(n)=f_{n+1}-1$,

故

$$\begin{aligned}g(n)(g(n)+1)&=f_{n+1}(f_{n+1}-1)\\&=\frac{1}{2^{2n}}\left(\sum C_{n+1}^{2i+1}5^i\right)\left(\sum C_{n+1}^{2i+1}5^i-2^n\right)\end{aligned}$$

因为 $n(>5)$ 为素数,当 $1<2i+1<n$ 时,C_{n+1}^{2i+1} 能被 n 整除,故

$$\left(\sum C_{n+1}^{2i+1}5^i\right)\left(\sum C_{n+1}^{2i+1}5^i-2^n\right)$$

$$\equiv(n+1+5^{\frac{n-1}{2}})(n+1+5^{\frac{n-1}{2}}-2^n)$$

$$\equiv (5^{\frac{n-1}{2}} + 1)(5^{\frac{n-1}{2}} + 1 - 2^n) \pmod{n}$$

由费尔马小定理，

$$5^{n-1} \equiv 1 \pmod{n},\ 2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

故

$$(5^{\frac{n-1}{2}} + 1)(5^{\frac{n-1}{2}} + 1 - 2^n)$$
$$\equiv (5^{\frac{n-1}{2}} + 1)(5^{\frac{n-1}{2}} + 1 - 2)$$
$$\equiv 5^{n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

即

$$\left(\sum C_{n+1}^{2i+1} 5^i\right)\left(\sum C_{n+1}^{2i+1} 5^i - 2^n\right) \equiv 0 \pmod{n}$$
$$2^{2n} g(n)(g(n) + 1) \equiv 0 \pmod{n}$$
$$g(n)(g(n) + 1) \equiv 0 \pmod{n}$$

证毕。

(189) 因为 $u_5 = 5$，由题 187，

$$(u_{5k}, 5) = (u_{5k}, u_5) = u_{(5k,5)}$$
$$= u_5 = 5$$

故 u_{5k} 能被 5 整除。

十二 数有"血统"
——亲疏与繁衍

【试题】

题 190 设 a 与 b 都是正数

(1) 试证 $\sqrt{2}$ 必在 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{a+2b}{a+b}$ 之间;

(2) 问这两数哪一个更接近于 $\sqrt{2}$? (成都,1963)

题 191 设 $x_0 = 10^9, x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}}$ $(n \geqslant 1)$。

求证:$0 < x_{36} - \sqrt{2} < 10^{-9}$ (莫斯科,1953)

题 192 设 m、n 为整数,且 $m \geqslant 1, n \geqslant 1, \sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$。

证明:$\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$ (罗马尼亚,1978)

题 193 设 R 是一个非负有理数,求整数 a、b、c、d、e、f,使得对 R 的任何选取,恒有

$$\left|\frac{aR^2 + bR + c}{dR^2 + eR + f} - \sqrt[3]{2}\right| < \left|R - \sqrt[3]{2}\right| \quad (美国,1 届)$$

题 194 证明:存在有界无穷数列 $\{x_n\}$,使得对任意不同的正整数 m 和 k,满足不等式

$$|x_m - x_k| \geqslant \frac{1}{|m-k|} \quad (全苏,12 届)$$

题 195 开区间(0,1)中的每个有理数$\frac{p}{q}$(p、q是互素之正整数)被长为$\frac{1}{2q^2}$，中心在$\frac{p}{q}$的闭区间所覆盖。求证：$\frac{\sqrt{2}}{2}$不在上述任一闭区间内。 (普特南，9届)

题 196 设$a_i \in \{1,2,\cdots,9\}$。求证：$\sum \frac{a_i}{10^{i!}}$不是任何整系数代数方程的根。 (国家集训队试题，1991)

题 197 求证：存在无限多个不同的正整数N，使$\sin N \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$。 (天津，1979)

题 198 以圆的某一半径作为角度等于零的初始方向，由圆心出发，作出角度分别是0，±1，±2，… 弧度的有向射线，交圆周于点P_0，$P_{\pm1}$，$P_{\pm2}$，…，求证：圆周上不存在区间，使这区间上不含任何一点P_i($i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)。

(普特南，12届)

题 199 求证：对任何正数$\varepsilon > 0$，存在正整数n，使

$$\left|\sin n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$ (苏联，大学生，1977)

题 200 求正整数$x_1, x_2, \cdots, x_{29}$，其中至少有一个大于1988，使得

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{29}^2 = 29x_1x_2\cdots x_{29}$$

成立。 (IMO 备选题，29届)

题 201 设a、b为正整数，$ab+1$整除a^2+b^2。求证：$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$是完全平方数。 (IMO，29届)

【背景】

数学家们很早就考虑如下问题：给定实数 r，确定函数 $f(x)$：

$$x_1 = f(x_0),\ x_{n+1} = f(x_n) \quad (n \geqslant 1)$$

使对某范围内的任一 x_0，恒有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r$$

并估计 $|x_n - r|$ 的范围。

当 $r = \sqrt{2}$ 时，取 $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$，则对任何 $x_0 > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$。此为题 190 之背景。

取 $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x}$，则对任何 $x > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$。此为题 191 之背景。

题 193 是考虑 $r = \sqrt[3]{2}$ 的情况。

题 192、194、195、196 是考虑 $|x_n - r|$ 的范围。对此，我们有如下刘维尔(Liouville，1809 — 1882)定理。

定理 1 设 r 是 $n(\geqslant 2)$ 次不可约整系数多项式 $p(x)$ 的零点，则存在正数 δ，使得对任何分数 $\dfrac{q}{p}$，

$$\left|r - \frac{q}{p}\right| \geqslant \frac{\delta}{p^n}$$

因 $\sqrt{7}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 都是二次不可约整系数多项式的零点，因此不能“很好地”逼近它们。

题 196 可直接利用上述定理得到。

不难证明：

定理 2 设 r 是无理数，$\langle nr\rangle = nr - [nr]$ 为 nr 的纯小数部分，则当 n 取遍一切自然数时，$\langle nr\rangle$“稠密地”分布在区间

$(0,1)$ 中，即对 $(0,1)$ 中的任一区间，存在 n，使 $\langle nr\rangle$ 在此区间中。

题 197，198，199 是上述定理变化而成的。

考虑方程 $f(x,y,z,\cdots)=0$ 的正整数解。若它有一组解且由它的一组解 $(x,y,z,\cdots)$ 可得另一组解 $(x',y',z',\cdots)$，使得

$$\max(x',y',z',\cdots)>\max(x,y,z,\cdots)$$

或

$$x'+y'+z'+\cdots>x+y+z+\cdots$$

则这个方程必有无限多组正整数解。

上述方法是俄罗斯数学家马尔可夫在研究方程 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ 时首先引用的。题 200 实质即用此方法。

若由方程 $f(x,y,z,\cdots)=0$ 的一组正整数解 $(x,y,z,\cdots)$ 可得另一组正整数解 $(x',y',z',\cdots)$，使得

$$\max(x',y',z',\cdots)<\max(x,y,z,\cdots)$$

或

$$x'+y'+z'+\cdots<x+y+z+\cdots$$

则说明这个方程没有正整数的解。这个方法是费尔马在证明方程 $x^4+y^4=z^4$ 无正整数解时首先使用的。又称"无穷递降法"。

题 201 即用上述方法。这道题在数学竞赛史上曾有一段引人深思的佳话，见本丛书《数学宫趣游》。印度当代数学家史拉里(S. Shirali) 把这道题推广为：设 a、b、c 是正整数，且 $0<a^2+b^2-abc\leqslant c$，则 a^2+b^2-abc 是完全平方数。

【解答】

(190) 由$\left(\frac{a}{b}-\sqrt{2}\right)\left(\frac{a+2b}{a+b}-\sqrt{2}\right)$

$$=\frac{(1-\sqrt{2})(a-\sqrt{2}b)^2}{b(a+b)}<0$$，得(1)

因 $\left|\frac{a+2b}{a+b}-\sqrt{2}\right|=\frac{(\sqrt{2}-1)|a-\sqrt{2}b|}{a+b}<\left|\frac{a-\sqrt{2}b}{b}\right|=\left|\frac{a}{b}-\sqrt{2}\right|$，故$\frac{a+2b}{a+b}$更接近$\sqrt{2}$。

(191) 由递推式，得

$$\frac{x_n-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}}=\left(\frac{x_{n-1}-\sqrt{2}}{x_{n-1}+\sqrt{2}}\right)^2$$

故

$$\frac{x_{36}-\sqrt{2}}{x_{36}+\sqrt{2}}=\left(\frac{x_0-\sqrt{2}}{x_0+\sqrt{2}}\right)^{2^{36}}$$

即

$$x_{36}=\sqrt{2}\cdot\frac{(x_0+\sqrt{2})^{2^{36}}+(x_0-\sqrt{2})^{2^{36}}}{(x_0+\sqrt{2})^{2^{36}}-(x_0-\sqrt{2})^{2^{36}}}>\sqrt{2}$$

又

$$x_{36}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}\cdot\frac{(x_0-\sqrt{2})^{2^{36}}}{(x_0+\sqrt{2})^{2^{36}}-(x_0-\sqrt{2})^{2^{36}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\left(\frac{x_0+\sqrt{2}}{x_0-\sqrt{2}}\right)^{2^{36}}-1}\left(\frac{x_0+\sqrt{2}}{x_0-\sqrt{2}}\right)^{2^{36}}$$

$$=\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{x_0-\sqrt{2}}\right)^{2^{36}}$$

$$> (1+\frac{2\sqrt{2}}{x_0})^{2^{35}}$$

$$> (1+2^{-28.5})^{2^{36}} > 2^{28.5}$$

故

$$x_{36}-\sqrt{2}<2^{-27}<10^{-9}$$

(192) 由 $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0$，得 $7n^2-m^2>0$，但 $7n^2-m^2=1$ 与 $7n^2-m^2=2$ 无整数解(因 m^2+1 与 m^2+2 不能为 7 之倍数)，故 $7n^2-m^2\geqslant 3$

当 $\frac{m}{n}>\frac{\sqrt{7}}{2}$ 时，$\sqrt{7}-\frac{m}{n}=\frac{7n^2-m^2}{n(\sqrt{7}+m)}>\frac{1}{mn}$

当 $\frac{m}{n}<\frac{\sqrt{7}}{2}$ 时，$\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{\sqrt{7}}{2}>1\geqslant\frac{1}{mn}$

(193) 令 $R\to\sqrt[3]{2}$，得

$$\frac{a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c}{d\sqrt[3]{4}+e\sqrt[3]{2}+f}=\sqrt[3]{2}$$

即 $(a-e)\sqrt[3]{4}+(b-f)\sqrt[3]{2}+(c-2d)=0$

故

$$a=e \qquad b=f \qquad c=2d$$

这时

$$\left|\frac{aR^2+bR+c}{dR^2+eR+f}-\sqrt[3]{2}\right|$$

$$=|R-\sqrt[3]{2}|\cdot\frac{|eR+f-\sqrt[3]{2}d(\sqrt[3]{2}+R)|}{|dR^2+eR+f|}$$

故只要取 $a=d=e=1$，$b=c=f=2$，题中不等式恒成立。

(194) 取 $x_n=4\{n\sqrt{2}\}$，其中 $\{x\}=x-[x]$ 表示 x 的纯小数部分。对任何正整数 p,q，

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|=\frac{|p^2-2q^2|}{q(p+\sqrt{2}q)}\geqslant\frac{1}{q(p+\sqrt{2}q)}$$

当 $m>k\geqslant 1$ 时，

$$l=[m\sqrt{2}]-[k\sqrt{2}]\geqslant 1,\ l<(m-k)\sqrt{2}+1$$

故

$$\begin{aligned}&|\{m\sqrt{2}\}-\{k\sqrt{2}\}|\\=&|(m-k)\sqrt{2}-l|\\=&(m-k)\left|\sqrt{2}-\frac{l}{m-k}\right|\\\geqslant&\frac{1}{l+\sqrt{2}(m-k)}>\frac{1}{4(m-k)}\end{aligned}$$

即

$$|x_m-x_k|>\frac{1}{m-k}$$

(195) 只要证明：对一切互素正整数 p,q，

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|>\frac{1}{4q^2}\tag{1}$$

即
$$|q-\sqrt{2}p|>\frac{1}{2\sqrt{2}q}\tag{2}$$

而
$$|q-\sqrt{2}p|=\frac{|q^2-2p^2|}{q+\sqrt{2}p}\geqslant\frac{1}{q+\sqrt{2}p}\tag{3}$$

当 $\frac{p}{q}<2-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，由(3)得(2)，故式(1)成立。

当 $\frac{p}{q}>2-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\frac{p}{q}-\frac{\sqrt{2}}{2}>2-\sqrt{2}>\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{4q^2}$$

(196) 更一般地，先证明定理 1。

设 r 是不可约整系数多项式 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+$

$a_n x^n$ 的零点，$n \geqslant 2$，则 r 不是有理数。否则，若 $r = \frac{c}{d}$，则 $p(x)$ 有多项式因子 $dx - c$。

取 $\delta = \dfrac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i} C_i^j |a_i r^{i-j}|}$，记 $\frac{q}{p} - r = \triangle$，

当 $|\triangle| \geqslant 1$ 时，显然

$$|r - \frac{q}{p}| = |\triangle| \geqslant \frac{\delta}{p^n}$$

当 $|\triangle| < 1$ 时，

$$\frac{1}{p^n} \leqslant |p(\frac{q}{p})| = |p(\frac{q}{p}) - p(r)|$$

$$= |\sum_{i=1}^{n} a_i[(\frac{q}{p})^i - r^i]|$$

$$= |\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{i} C_i^j r^{i-j} \triangle^j|$$

$$\leqslant |\triangle| \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} |a_i| C_i^j |r|^{i-j}$$

故

$$|\triangle| > \frac{\delta}{p^n} \qquad 从而 \qquad |r - \frac{p}{q}| = |\triangle| > \frac{\delta}{p^n}$$

下面证题 196

先证 $r = \sum \frac{a_n}{10^{n!}}$ 不是有理数。否则，设 $r = \frac{q}{p}$，则对一切正整数 n，

$$10^{n!} pr = 10^{n!} p \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^{i!}} + 10^{n!} p \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{10^{i!}}$$

是整数。故

$$t = 10^{n!} p \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{10^{i!}}$$

$$= 10^{n!}pr - 10^{n!}p\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{10^{i!}}$$

是整数。但当 n 充分大时，

$$0 < t \leqslant 9p\left(\frac{1}{10^{n!}} + \frac{1}{10^{2\cdot n!}} + \cdots\right) < \frac{p}{10\cdot 10^{n!}} < 1$$

矛盾。

对任何整数 $n \geqslant 2$，

$$\left|r - \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{10^{i!}}\right| = \sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{a_i}{10^{i!}}$$

$$\leqslant 9\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{10^{i!}}$$

$$< \frac{10}{10^{(k+1)!}}$$

$$= \frac{1}{(10^{k!})^n}\cdot\frac{1}{10^{(k+1-n)k!-1}}$$

当 $k \to \infty$ 时，

$$\frac{1}{10^{(k+1-n)k!-1}} \to 0$$

即定理 1 中的常数 $\delta > 0$ 不存在，得 r 不是任何整系数代数方程的根。

(197) 若 $\sin n < \frac{\sqrt{3}}{2}$，则存在整数 k_n，使得

$$2k_n\pi - \frac{4}{3}\pi < n < 2k_n\pi + \frac{\pi}{3}$$

设 m 是大于 $2k_n\pi + \frac{\pi}{3}$ 的最小正整数，即

$$m - 1 < 2k_n\pi + \frac{\pi}{3},\quad m > 2k_n\pi + \frac{\pi}{3}$$

则

$$m < 2k_n\pi + \frac{\pi}{3} + 1 < 2k_n\pi + \frac{2}{3}\pi$$

故 $\sin m > \frac{\sqrt{3}}{2}$，即存在无限多不同的正整数 N，使 $\sin N > \frac{\sqrt{3}}{2}$。

(198) 对任何整数 n，存在唯一整数 k_n 与实数 $r_n(0 \leqslant r_n < 2\pi)$，使得 $n = 2k_n\pi + r_n$。若圆周上区间两端所在半径为终边的角度为 α、β 弧度，$0 \leqslant \alpha < \beta < 2\pi$，则此区间记为 (α, β)。令 $\delta = \beta - \alpha$，由抽屉原理，当 $n > \frac{2\pi}{\delta}$ 时，$r_0, r_1, \cdots, r_n$ 中，至少有两个差不超过 δ。设 $0 < r_l - r_k < \delta$，则 $r_{l-k} = r_l - r_k$。令 $m = [\frac{\beta}{r_l - r_k}]$，则 $\alpha < r_{m(l-k)} < \beta$，即区间 (α, β) 至少含一点 P_i。证毕。

(199) 为题 198 之特殊情况。

(200) 设 $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \cdots, x_{29} = a_{29}(a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{29})$ 是给定方程的一组正整数解，即 a_1 是二次方程

$$x^2 - 29a_2a_3\cdots a_{29}x + (a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{29}^2) = 0$$

的一解。由韦达定理得，另一解是

$$a'_1 = 29a_2a_3\cdots a_{29} - a_1 = \frac{a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{29}^2}{a_1}$$

由第一个等式得 a'_1 是整数，由第二个等式得 a'_1 是正数，且

$$a'_1 \geqslant 29a_{29} - a_1 \geqslant 28a_{29}$$

故 $x_1 = a'_1, x_2 = a_2, \cdots, x_{29} = a_{29}$ 是给定方程的另一组正整数解。

显然，$(1,1,\cdots,1)$ 是给定方程的一组正整数解。由上述方法得另一组解 $(1,1,\cdots,28)$，再得 $(1,1,\cdots,28,811)$，又得 $(1,1,\cdots,28,811,658531)$，此解合要求。

(201) 设$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k$，则 k 是正整数。

不妨设方程 $x^2+y^2=k(xy+1)$，使 $x\leqslant y$，且 y 取最小值的非负整数解是 $x=a,y=b$，则仅有下述两种可能情况：

(*i*) $a=b$。这时 $a^2(2-k)=k$，做 $2-k>0$，即 $k=1$，是完全平方数。

(*ii*) $a=0$。否则，$0<a<b$，这时 b 是方程

$$y^2-kay+a^2-k=0 \tag{4}$$

的一正整数解，其另一解 b'，由韦达定理，得

$$b'=ka-b=\frac{a^2-k}{b}$$

由第一等式得 b' 是整数。因$\frac{a^2-k}{b}>-1$，得 b' 是非负整数，又 $b'=\frac{a^2-k}{b}<a$，故方程(4)有一解 $y=b'$，$0\leqslant b'<a$。从而方程 $x^2+y^2=k(xy+1)$ 有非负整数解 $x=b'$，$y=a$。这时 $x<y$，且 y 取值 $a<b$，与原先假设 y 取最小值 b 矛盾。

由 $a=0$，得 $k=b^2$，是完全平方数。证毕。

十三 整除性问题

【试题】

设 a,b 是整数，$a\neq 0$，若$\dfrac{b}{a}$是整数，称 a 整除 b，记为 $a|b$。

题 202 $168|13^{2n}-1$ （上海，1956）

题 203 $64|3^{2n}-8n-1$ （南京，1957）

题 204 $576|5^{2n}-24n-1$ （武汉，1958）

题 205 $26460|27195^{8}-10887^{8}+10152^{8}$

（莫斯科，1949）

题 206 $1897|2903^{n}-803^{n}-464^{n}+261^{n}$

（匈牙利，1899）

题 207 $8|5^{n}+2\times 3^{n-1}+1(n\geqslant 1)$ （匈牙利，1912）

题 208 $1947|46^{2n+1}+296\times 13^{2n+1}$ （匈牙利，1947）

题 209 求证：对任何自然数 n，分数$\dfrac{21n+4}{14n+3}$不可约简。

（IMO，1 届）

题 210 求所有能够约简分数$\dfrac{5l+6}{8l+7}$的约数，其中 l 是整数。

（莫斯科，1956）

题 211 求使$\dfrac{n-13}{5n+6}$是一个非零的可约分数的最小正整数 n。

（美国，1985）

题 212 若 n 为小于 50 的自然数，求使代数式 $4n+5$ 和

$7n+6$的值有大于1的公约数的所有的n的值。

（天津，初二，1991）

题 213 证明：对任意的正整数n，$n^2+8n+15$不能被$n+4$整除。（莫斯科，1953）

题 214 求使n^3+100能被$n+10$整除的正整数n的最大值。（美国，1986）

题 215 求证：$\frac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$对任何整数$a$都是不可约的。（苏联，威特比斯克市）

题 216 若n是不能被3整除的正整数，则$\frac{180^\circ}{n}$角能用Euclid方法（即仅用直尺与圆规）三等分。（美国，1981）

题 217 设$p(x)=x^2+bx+c$（b，c是整数），若$p(x)$既是x^4+6x^2+25，也是$3x^4+4x^2+28x+5$的一个因式，那么$p(1)$的值是

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 8 （美国，1986）

题 218 证明：对任何自然数n，n^3+3n^2+5n+9总能被3整除。（云南，1979）

题 219 证明：$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$对任何正整数$n$都是整数，并且被3除时余2。（北京，1956）

题 220 求证：对任意自然数n，n^3+5n能被6整除。

（苏联，奥尔德尼基茨市，3届）

题 221 对一切正整数n，能除尽n^5-n的最大正整数是

(A) 1 (B) 15 (C) 30 (D) 60

(E) 前面几个答案都不对。（新加坡，1985）

题 222 求证：对任何整数n，n^5-5n^3+4n都可以被120除尽。（苏联，威特比斯克市）

题 223　证明：$n^2(n^2-1)(n^2-4)$ 当 $n=1,2,3,\cdots$ 时都可以被 360 整除。　　　　　　　　　　　　　　（美国，1963）

题 224　求证：对一切整数 x，$p=\frac{1}{630}x^9-\frac{1}{21}x^7+\frac{13}{30}x^5-\frac{82}{63}x^3+\frac{32}{35}x$ 是整数。　　　　　　　　（东德，1983）

题 225　求证：1）具有给定的常数系数的任一个二次三项式 Ax^2+Bx+C 可以表示成 $k\frac{x(x-1)}{1\times2}+lx+m$ 的形式，其中 k、l 和 m 有完全确定的数值。

2）二次三项式 Ax^2+Bx+C 对所有的整数 x 都取整数值，当且仅当：如果把它们表示成 $k\cdot\frac{x(x-1)}{1\times2}+lx+m$ 的形式时，系数 k、l 和 m 是整数。　　　　　　　　（匈牙利，1902）

题 226　① 已知：对任何整数 x，整系数多项式 ax^3+bx^2+cx+d 能被 5 整除，求证：所有系数 a、b、c、d 都能被 5 整除。

② 已知：对任何整数 x，整系数多项式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 能被 7 整除，求证：所有系数 a、b、c、d、e 都能被 7 整除。

（莫斯科，1957）

题 227　在能除尽 $2^n!$ 的 2 的所有乘幂中，其最高的幂次是多少？　　　　　　　　　　　　　　　　　　（匈牙利，1939）

题 228　求证：2^{n-1} 能整除 $n!$，当且仅当 $n=2^{k-1}$，其中 k 是正整数。　　　　　　　　　　　　　　（加拿大，1985）

题 229　从 1 到 100 的所有整数的乘积的结尾包含多少个零？　　　　　　　　　　　　　　　　　　（莫斯科，1940）

题 230　数 1000! 的末尾有多少个零？　（匈牙利，1924）

题 231　若 k 是自然数，且

$$\frac{1001\times1002\times\cdots\times1982}{11^k}$$

是整数，则 k 的最大值是多少？（北京，1986）

题 232 设 m、n 是任意非负整数，试证：

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

是整数。这里约定 $0!=1$。（IMO，14 届）

题 233 ① 证明：$[5x]+[5y]\geqslant[3x+y]+[3y+x]$；

② 证明：对所有正整数 m、n，

$$\frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$$

是整数。（美国，4 届）

题 234 m 为正整数，定义 $f(m)$ 为 $m!$ 中因数 2 的个数（即满足 $2^k|m!$ 的最大整数 k）。求证：有无限多个正整数 m，使

$m-f(m)=1989$（IMO 备选题，30 届）

题 235 求证：

$\dfrac{(1987^2)!}{(1987!)^{1988}}$ 是整数。（大洋洲，10 届）

【背景】

题 202—208 源于因式分解公式

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

由此公式，若 x、y 是整数，且 $x\neq y$，则 x^n-y^n 能被 $x-y$ 整除。

题 209—217 源于带余除法公式：设 a、b 是整数，$b>0$，则存在整数 q_1 与 $r_1(0\leqslant r_1<b)$ 使得

$$a=b_1q_1+r_1\qquad(1)$$

若 $r_1\neq 0$，分别以 b、r_1 代替 a、b，可得

$$b=r_1q_2+r_2\quad(0\leqslant r_2<r_1)\qquad(2)$$

依此下去，得

$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \quad (0 \leqslant r_3 < r_2) \tag{3}$$

…… ……

因 $b > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots$，故存在 n，使得 $r_n = 0$，即

$$r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1} \tag{4}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n \tag{5}$$

可以证明：

$$(a,b) = (b,r_1) = (r_1,r_2) = \cdots = (r_{n-2},r_{n-1}) = r_{n-1} \tag{6}$$

实际上，式(1)—(5) 蕴含式(6)，条件 $b > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots$ 是不必要的。即有

定理 1　设 a、b 是整数，$b \neq 0$，$a = bq + r$，则 $(a,b) = (b,r)$。

进而由式(1)—(6) 可得

定理 2　设 a、b 是不全为零的整数，则存在整数 x，y，使得

$$ax + by = (a,b)$$

题 218—226　源于整值多项式的一个定理。所谓整值多项式是：对一切整数 x，$p(x)$ 恒为整数的多项式 p。

定理 3　$p(x)$ 是 n 次整值多项式，当且仅当存在整数 a_0，a_1，…，$a_n(a_n \neq 0)$，使得

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2\frac{x(x-1)}{1\times 2} + \cdots + a_n\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{1\times 2\times\cdots\times n} \tag{7}$$

而且，对一切整数 x，$p(x)$ 能被 k 整除，当且仅当每一个系数 a_0，a_1，a_2，…，a_n 能被 k 整除。

证明：利用数学归纳法可以证明：对任何整数 x，

$$\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{1\times 2\times\cdots\times n}$$

是整数。故若 $a_0,a_1,\cdots,a_n(a_n\neq 0)$ 为整数，则由式(7)表示的 n 次多项式对一切整数 x，取整数值；进而若 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都能被 k 整除，则对一切整数 x，$p(x)$ 能被 k 整除。

反之，令

$$a_0 = p(0)$$

$$a_i = \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}C_i^j p(j)$$

则当对一切整数 x，$p(x)$ 是整数时，每一个 a_i 是整数；当对一切整数 x，$p(x)$ 能被 k 整除时，每一个 a_i 能被 k 整除，且多项式

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{n}a_j\frac{x(x-1)\cdots(x-j+1)}{1\times 2\times\cdots\times j}$$

当 $x=i\ (i=0,1,2,\cdots,n)$ 时，函数值

$$\begin{aligned}Q(i) &= \sum_{j=1}^{i}a_j\cdot\frac{i(i-1)\cdots(i-j+1)}{1\times 2\times\cdots\times j}\\ &= \sum_{j=0}^{i}a_jC_i^j\\ &= \sum_{j=0}^{i}C_i^j\sum_{t=0}^{j}(-1)^{j-t}C_j^t p(t)\\ &= \sum_{t=0}^{i}\sum_{j=t}^{i}(-1)^{j-t}C_i^jC_j^t p(t)\\ &= \sum_{t=0}^{i}\sum_{j=t}^{i}(-1)^{j-t}C_i^tC_{i-t}^{j-t}p(t) = p(i)\end{aligned}$$

即两个至多 n 次多项式 $p(x)$，$Q(x)$，当 x 取 $0,1,\cdots,n$ 这 n 个值时相等，从而得 $p(x)$ 与 $Q(x)$ 恒等。得式(7)。

题 227—235 是勒让德(Legendre,1752 — 1833) 定理的直接应用。

定理 4 设 p 是素数,使 p^k 能整除 $n!$的 k 的最大值是

$$l(p,n)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] \tag{8}$$

证明:因 $n!=1\times 2\times\cdots\times n$ 的 n 个因子 $1,2,\cdots,n$ 中,有$\left[\frac{n}{p}\right]$个是 p 的倍数;这$\left[\frac{n}{p}\right]$个 p 的倍数中,有$\left[\frac{n}{p^2}\right]$个是 p^2 的倍数;这$\left[\frac{n}{p^2}\right]$个 p^2 的倍数中,有$\left[\frac{n}{p^3}\right]$个是 p^3 的倍数;…,由此得式(8)。

【解答】

(202) $13^{2n}-1=169^n-1^n$ 能被 $169-1=168$ 整除。

(203) $3^{2n}-8n-1$

$$\begin{aligned}
&=9^n-1-8n\\
&=8(9^{n-1}+9^{n-2}+\cdots+9+1)-8n\\
&=8(9^{n-1}+9^{n-2}+\cdots+1-n)\\
&=8[(9^{n-1}-1)+(9^{n-2}-1)+\cdots+(9-1)+\\
&\quad(1-1)]\\
&=64[(9^{n-2}+9^{n-3}+\cdots+1)+(9^{n-3}+9^{n-4}+\\
&\quad\cdots+1)+\cdots+1]
\end{aligned}$$

能被 64 整除。

(204) 类似 203 题。

(205) 因 $27195^8-10887^8$ 能被 $27195-10887=16308=108\times 151$ 整除,$10152=108\times 94$ 能被 108 整除,故 $27195^8-10887^8+10152^8$ 能被 108 整除。

又因 $10887^8-10152^8$ 能被 $10887-10152=735=245\times 3$ 整除，$27195=245\times 111$ 能被 245 整除，故 $27195^8-10887^8+10152^8$ 能被 245 整除。

又 $(108,245)=(2^2\times 3^3,5\times 7^2)=1$，故 $27195^8-10887^8+10152^8$ 能被 $108\times 245=26460$ 整除。

(206) 因 $2903-803=2100$ 与 $464-261=203$ 均能被 7 整除；$2903-464=2439$ 与 $803-261=542$ 均能被 271 整除，故 $2903^n-803^n-464^n+261^n$ 能被 $7\times 271=1897$ 整除。

(207) 当 $n=2k$ 为偶数时，$5^{2k}+2\times 3^{2k-1}+1=(5^{2k}-1)+2(3^{2k-1}+1)=24(25^{k-1}+25^{k-2}+\cdots+1)+8(3^{2k-2}-3^{2k-3}+\cdots-3+1)$ 能被 8 整除。

当 $n=2k+1$ 为奇数时，$5^{2k+1}+2\times 3^{2k}+1=(5^{2k+1}+3^{2k+1})-(3^{2k}-1)$ 能被 8 整除。

(208) 因 $46^{2n+1}+296\times 13^{2n+1}=(46^{2n+1}+13^{2n+1})+59\times 5\times 13^{2n+1}$ 能被 59 整除；$46^{2n+1}+296\times 13^{2n+1}=(46^{2n+1}-13^{2n+1})+33\times 9\times 13^{2n+1}$ 能被 33 整除，故 $46^{2n+1}+296\times 13^{2n+1}$ 能被 $59\times 33=1947$ 整除。

(209) 因 $21n+4=(14n+3)+(7n+1)$

$$14n+3=2(7n+1)+1$$

故 $(21n+4,14n+3)=1$

(210) 因

$$8l+7=(5l+6)+(3l+1)$$
$$5l+6=(3l+1)+(2l+5)$$
$$3l+1=(2l+5)+(l-4)$$
$$2l+5=2(l-4)+13$$

故能够约简分数 $\frac{5l+6}{8l+7}$ 的约数是 13(比如取 $l=17$)。

(211) 因 $5n+6=5(n-13)+71$，故 $\frac{n-13}{5n+6}$ 可约分，仅当 $71\mid(n-13)$，得最小正整数 $n=71+13=84$。

(212) 因 $7n+6=(4n+5)+(3n+1)$

$$4n+5=(3n+1)+(n+4)$$

$$3n+1=3(n+4)-11$$

故 $n+4$ 是 11 的倍数，从而 $n=7,18,29,40$。

(213) 因 $n^2+8n+15=(n+4)^2-1$，故 $(n^2+8n+15,n+4)=1$。又 $n+4>4\neq 1$，故 $n^2+8n+15$ 不能被 $n+4$ 整除。

(214) 因 $n^3+100=(n+10)(n^2-10n+100)-900$，故 $(n^3+100,n+10)=(n+10,900)$。$n^3+100$ 能被 $n+10$ 整除，当且仅当 $(n^3+100,n+10)=n+10$，即 $(n+10,900)=n+10$，也就是说，900 能被 $n+10$ 整除。这时，n 的最大值是 890。

(215) 由 $a^4+3a^2+1=a(a^3+2a)+(a^2+1)$，$a^3+2a=a(a^2+1)+a$，$a^2+1=a\cdot a+1$ 立得。

(216) 若正整数 n 不能被 3 整除，则 $(n,3)=1$，故存在整数 x、y，使得 $nx+3y=1$，即 $60x+\frac{180}{n}y=\frac{60}{n}$，从而 $\frac{60^\circ}{n}=60^\circ x+\frac{180^\circ}{n}y$。已知 $\frac{180^\circ}{n}$，可用 Euclid 方法作出 $\frac{180^\circ}{n}y$，而 $60^\circ x$ 显然可用 Euclid 方法作出，故可用 Euclid 方法作出 $\frac{180^\circ}{n}$ 的三等分角 $\frac{60^\circ}{n}$。

(217) 因 $3x^4+4x^2+28x+5=3(x^4+6x^2+25)-14(x^2-2x+5)$，故 $p(x)=x^2-2x+5$ 从而 $p(1)=4$。

选(D)。

(218) $n^3+3n^2+5n+9=6C_n^3+12C_n^2+9C_n^1+9$ 能被 3 整除。

(219) $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1=(6C_n^3+9C_n^2+3C_n^1-3)+2$。

(220) $n^3+5n=6C_n^3+6C_n^2+6C_n^1$。

(221) $n^5-n=120C_n^5+240C_n^4+150C_n^3+30C_n^2$，选(C)。

(222) $n^5-5n^3+4n=120C_n^5+240C_n^4+120C_n^3$。

(223) $n^2(n^2-1)(n^4-1)=720C_n^6+1800C_n^5+1440C_n^4+360C_n^3$。

(224) $p=576C_{n+4}^6$。

(225) 见定理 3 证明。

(226) 应用定理 3。

(227) 由定理 4，$l(2,2^n)=\sum_{i=1}^{n}[\frac{2^n}{2^i}]=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+1=2^n-1$。

(228) 把 n 展开成二进制：$n=a_0+2a_1+\cdots+2^{k-1}a_{k-1}(a_i=0,1;a_{k-1}=1)$

$$
\begin{aligned}
l(2,n)&=\sum[\frac{n}{2^i}]\\
&=(a_1+2a_2+\cdots+2^{k-2}a_{k-1})+(a_2+2a_3+\cdots\\
&\quad+2^{k-3}a_{k-1})+\cdots+a_{k-1}\\
&=a_1+(1+2)a_2+\cdots+(1+2+\cdots+2^{k-2})a_{k-1}\\
&=(1-1)a_0+(2-1)a_1+(2^2-1)a_2+\cdots\\
&\quad+(2^{k-1}-1)a_{k-1}\\
&=n-(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})
\end{aligned}
$$

2^{n-1}能整除$n!$，当且仅当$n-1\leqslant l(2,n)$，即

$$a_0+a_1+\cdots+a_{k-1}\leqslant 1$$

得　$a_0=a_1=\cdots=a_{k-2}=0$，　$a_{k-1}=1$。

(229) $l(2,100)>l(5,100)=\sum\left[\frac{100}{5^r}\right]=20+4=24$，即含24个零。

(230) $l(2,1000)>l(5,1000)=\sum\left[\frac{1000}{5^r}\right]=200+40+8+1=249$，即有249个零。

(231) 因 $l(11,1982)-l(11,1000)$

$$=\sum\left(\left[\frac{1982}{11^r}\right]-\left[\frac{1000}{11^r}\right]\right)$$

$$=(180-90)+(16-8)+(1-0)=99,$$

故k之最大值是99。

(232) 对任何实数x,y，

$$[2x]+[2y]\geqslant[x]+[x+y]+[y]$$

证：先对$0\leqslant x<1,0\leqslant y<1$给予证明。

设$[2x]=a$，$[2y]=b$，则a、$b=0$或1，且$\frac{a}{2}\leqslant x<\frac{a+1}{2}$，$\frac{b}{2}\leqslant y<\frac{b+1}{2}$，分情况计算得

$$[x]+[x+y]+[y]\leqslant a+b=[2x]+[2y]$$

对一般的实数x,y，设$x=[x]+r$，$y=[y]+s(0\leqslant r<1,0\leqslant s<1)$，则

$$[2x]+[2y]=2[x]+2[y]+[2r]+[2s]$$

$$\geqslant 2[x]+2[y]+[r]+[r+s]+[s]$$

$$[x]+[x+y]+[y]$$

$$=[x]+[[x]+[y]+r+s]+[y]$$

$$=2[x]+2[y]+[r+s]$$

故得 $[2x]+[2y]\geqslant[x]+[x+y]+[y]$

由上述不等式知，对任何素数 p 与正整数 i，

$$\left[\frac{2m}{p^i}\right]+\left[\frac{2n}{p^i}\right]\geqslant\left[\frac{m}{p^i}\right]+\left[\frac{m+n}{p^i}\right]+\left[\frac{n}{p^i}\right]$$

从而 $l(p,2m)+l(p,2n)\geqslant l(p,m)+l(p,m+n)+l(p,n)$ 得证。

(233) ① 先对 $0\leqslant x<1,0\leqslant y<1$ 证明给定不等式。设 $[5x]=a$，$[5y]=b$，则 $a,b=0,1,2,3,4$，且 $\frac{a}{5}\leqslant x<\frac{a+1}{5}$，$\frac{b}{5}\leqslant y<\frac{b+1}{5}$。计算得 $[3x+y]+[x+3y]\leqslant a+b=[5x]+[5y]$。

对一般的实数 x,y，证明更强的不等式：

$$[5x]+[5y]\geqslant[x]+[y]+[3x+y]+[x+3y] \tag{9}$$

因为，设 $x=[x]+r,y=[y]+s,(0\leqslant r<1,0\leqslant s<1)$，

$$[5x]+[5y]=5[x]+5[y]+[5r]+[5s]$$

$$[x]+[y]+[3x+y]+[x+3y]$$
$$=5[x]+5[y]+[3r+s]+[r+3s]$$

由 $[5r]+[5s]\geqslant[3r+s]+[r+3s]$ 得式(9)。

(2) 仿题 232，利用不等式(9)。

(234) 设 m 的二进制表示是 $m=a_0+2a_1+\cdots+2^ka_k$，由题 228 得

$$f(m)=m-(a_0+a_1+\cdots+a_m)$$

故 $m-f(m)=1989$，当且仅当

$$a_0+a_1+\cdots+a_k=1989$$

即只要 m 的二进制表示式中有 1989 个 1，则

$$m - f(m) = 1989$$

(235) 当代著名数论专家朱克曼(N. Zuckerman)有一个更一般的定理。

定理 5　设 a、b 是正整数，则 $\frac{(ab)!}{a!(b!)^a}$ 是整数。

证明：由勒让德定理(定理 4)，只要证明：对任何素数 p

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{b}{p^i}\right] + a\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{a}{p^i}\right] \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{ab}{p^i}\right] \tag{10}$$

当 $p > b$ 时，式(10) 显然成立。下设 $p^s \leqslant b < p^{s+1} (s \in N)$，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{ab}{p^i}\right] &= \sum_{i=1}^{s}\left[a \cdot \frac{b}{p^i}\right] + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{a}{p^i} \cdot \frac{b}{p^s}\right] \\ &\geqslant a\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{b}{p^i}\right] + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{a}{p^i}\right] \cdot \left[\frac{b}{p^s}\right] \\ &= a\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{b}{p^i}\right] + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{a}{p^i}\right]\end{aligned}$$

得式(10) 成立。

十四 素数深渊的边缘

【试题】

题 236 写出十个连续的自然数，个个都是合数。

（上海，1957）

题 237 求证：存在 1984 个连续自然数，其中恰有一个是素数。（苏联，1984）

题 238 求证：存在正整数 k，使得对所有正整数 n，数 $k\cdot 2^n+1$ 都是合数。（美国，11 届）

题 239 设 $T_1=2, T_{n+1}=T_n^2-T_n+1 \quad (n>0)$。求证：当 $m\neq n$ 时，T_m 与 T_n 互素。（普特南，1956）

题 240 设 $f(x)=x^2-x+1$。求证：对任意的自然数 $m(m>1)$，$f(m)$，$f(f(m))$，…，两两互素。（全苏，12 届）

题 241 数列 $\{2^n-3\}$ $(n=2,3,4,\cdots)$ 中至少有一个无限子数列，其中的项两两互素。（IMO，13 届）

题 242 证明：方程 $x^2+x+1=py$ 对无限多个素数 p，有整数解 (x,y)。（全苏，2 届）

【背景】

题 236 是如下一般定理之特例。

定理 1 对任何自然数 k，存在 k 个连续的自然数，个个都是合数。

证明：$(k+1)!+2,(k+1)!+3,\cdots,(k+1)!+(k+1)$ 分别有真约数 $2,3,\cdots,(k+1)$，即它们是 k 个连续的自然数，且都是合数。

这个定理表明素数存在任意长的间隙，因而相当"稀疏"。

题 237 与定理 1 可统一为如下定理。

定理 2 设不超过 n 的素数个数 $\pi(n)\geqslant k\geqslant 0$，则存在 n 个连续自然数，其中恰含 k 个素数。

证明：n 个连续自然数 $m,m+1,\cdots,m+n-1$ 中的素数个数记为 $f(m)$。由已知条件 $f(1)\geqslant k$，由定理 1，$f((n+1)!+2)=0$。又因为

$$f(m+1)-f(m)$$
$$=\begin{cases}1 & (m+n\text{ 是素数},m\text{ 为合数})\\ -1 & (m+n\text{ 是合数},m\text{ 为素数})\\ 0 & (m+n,m\text{ 同为素数或合数})\end{cases}$$

故必存在 $m(1\leqslant m\leqslant(n+1)!+2)$，使得 $f(m)=k$。

题 238 与费尔马数 $F(r)=2^{2^r}+1$（见本丛书《数学宫趣游》）有密切联系。

构造无穷数列，使得它的项两两互素，这是证明存在无限多个素数的一种方法。题 239—241 给出了三种构造方法。

题 242 之实质是：当 x 取遍一切正整数时，数列 $\{x^2+x+1\}$ 的项含无限多个素约数。由此也可用以证明素数的无限性。

【解答】

(236) 见定理 1 之证明。

(237) 见定理 2 之证明。

(238) 设 $F(r)=2^{2^r}+1$，则 $F(0)$，$F(1)$，$F(2)$，$F(3)$，$F(4)$ 是素数，$F(5)=2^{32}+1$ 是合数，它是素数 $p=641$ 与素数 $q=6700417$ 的积。

设 $t=F(5)-2=2^{32}-1=(2^{16}+1)(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)=F(4)F(3)F(2)F(1)F(0)$，则 p、q、t 两两互素，且 t 能被 $F(0)$，$F(1)$，$F(2)$，$F(3)$，$F(4)$ 整除。故由孙子定理，存在正整数 k，使得

$$k\equiv 1 \pmod t$$

$$k\equiv 1 \pmod p$$

$$k\equiv -1 \pmod q$$

对任何正整数 n，设 $n=2^r s$（r 是非负整数，s 是奇数）。

(1) 当 $0\leqslant r\leqslant 4$ 时，$k\cdot 2^n+1=k(2^{2^r s}+1)-(k-1)$ 有真约数 $F(r)=2^{2^r}+1$。

(2) 当 $r=5$ 时，$k\cdot 2^n+1=k(2^{32s}+1)-(k-1)$ 有真约数 $p=641$。

(3) 当 $r\geqslant 6$ 时，$k\cdot 2^n+1=k(2^{2^r s}-1)+(k+1)$ 有真约数 q。

(239) 对正整数 k 行数学归纳法，证明：

$$T_{n+k}\equiv 1 \pmod{T_n}$$

(240) 设 $f_1(m)=f(m)$，$f_{n+1}(m)=f(f_n(m))$。对正整数 k 行数学归纳法证明：

$$f_{n+k}(m)\equiv 1 \pmod{f_n(m)}$$

(241) 记 $f(n)=2^n-3$，利用归纳构造的方法。显然，$f(3)=5$ 与 $f(4)=13$ 互素，记 $k_1=3$，$k_2=4$。

设我们有 r 个两两互素的元素

$$f(k_1),f(k_2),\cdots,f(k_r)\quad (k_1<k_2<\cdots<k_r)$$

令

$$S = f(k_1)f(k_2)\cdots f(k_r)$$

则 S 是奇数。$S+1$ 个数 $2^0,2^1,\cdots,2^S$ 被 S 除，由抽屉原理，必有两数余数相同，设

$$2^a \equiv 2^b \pmod{S}, \ (0 \leqslant a < b \leqslant S)$$

因 $(2,S)=1$，故

$$2^{b-a} \equiv 1 \pmod{S}$$

设 $2^{b-a}-1 = lS$，则 $(2^{b-a}-3,S) = (lS-2,S) = (2,S) = 1$，即 $f(b-a)$ 与 S 互素，从而 $f(b-a)$ 与 $f(k_1),f(k_2),\cdots,f(k_r)$ 都互素，得 $r+1$ 个两两互素的元素。证毕。

(242) 可仿题239，240的构造方法证明，也可利用 Euclid 证明素数无限性的方法。

若给定方程只对有限个素数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 有整数解，则 $(p_1p_2\cdots p_n)^2 + p_1p_2\cdots p_n + 1$ 与素数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 均互素，故它有异于 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的素约数 q。从而 $x = p_1p_2\cdots p_n$， $y = \dfrac{(p_1p_2\cdots p_n)^2 + p_1p_2\cdots p_n + 1}{q}$ 是方程 $x^2+x+1=qy$ 的一组整数解，即给定方程还对素数 q 有解，矛盾。

十五 从勾股数组到费尔马大定理

【试题】

题 243 如果 x、y、z 均为整数，且有 $x^2+y^2=z^2$。求证：xy 能被 12 整除。（莫斯科，1936）

题 244 设 k 为正整数，M_k 是 $2k^2+k$ 与 $2k^2+3k$ 之间（包括这两个数在内）的所有整数组成的集合。能否将 M_k 分拆为两个子集 A,B，使得

$$\sum_{x\in A}x^2=\sum_{x\in B}x^2$$

（IMO 备选题，29 届）

题 245 确定并证明：是否可能在半径为 1 的单位圆上找到 1975 个点，使得任两点之间的距离都是有理数。

（IMO，17 届）

题 246 已知 a、b 均为正整数，且 $a>b$，$\sin\theta=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$（其中 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$），$A_n=(a^2+b^2)^n\sin n\theta$。求证：对一切自然数 n，A_n 均为整数。（全国，1990）

题 247 证明方程 $x^3+11^3=y^3$ 没有正整数 x 和 y 的解。

（加拿大，1972）

题 248 求证：任三个连续的自然数中，最大的数的立方

不可能等于其它两个数的立方和。（匈牙利，1909）

题249 若 $x+y$ 是素数，n 为奇数。求证：$x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解。（莫斯科，1963）

题250 设 k 是自然数，求证：不能存在整数 x、y、z，使 $z>0$，$0<x<k$，$0<y<k$，且 $x^k+y^k=z^k$。

（莫斯科，1959；英国，1980）

题251 试求下列方程的正整数解：

$$x^{2y}+(x+1)^{2y}=(x+2)^{2y}$$ （莫斯科，1958）

【背景】

公元前1000年左右，我国与巴比伦人就知道了关于直角三角形的勾股定理，并已得到一些勾股数组，即方程

$$x^2+y^2=z^2 \tag{1}$$

的自然数解。比如(3，4，5)，(5，12，13)等。这样的数组又称毕达哥拉斯(Pythagoras，公元前500年左右)数组。

定理1 方程(1)的全部自然数解可表示为：

$$x=(u^2-v^2)d,y=2uvd,z=(u^2+v^2)d \tag{2}$$

或

$$x=2uvd,y=(u^2-v^2)d,z=(u^2+v^2)d \tag{3}$$

其中 u、v、d 是自然数，$u>v$，u、v 有不同的奇偶性，且 $(u,v)=1$。

证明：显然，由式(2)、(3)表示的 (x,y,z) 是方程(1)的解。

反过来，对方程(1)的任一组自然数解，若 $(x,y)=d$，则 $d|z$。故 $\left(\frac{x}{d},\frac{y}{d},\frac{z}{d}\right)$ 也是方程(1)的一组自然数解，且 $x_0=$

$\frac{x}{d}, y_0 = \frac{y}{d}, z_0 = \frac{z}{d}$两两互素，从而$x_0, y_0$至多一个为偶数。但是$x_0, y_0$不全为奇数，否则，

$$z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 \equiv 1 + 1 \pmod 8 \equiv 2 \pmod 8$$

则z_0^2不能是一自然数的平方。

这样，x_0, y_0恰有一个为奇数，不妨设x_0是奇数，y_0是偶数，故z_0为奇数。因为

$$y_0^2 = z_0^2 - x_0^2 = (z_0 + x_0)(z_0 - x_0)$$

所以

$$(\frac{y_0}{2})^2 = \frac{z_0 + x_0}{2} \cdot \frac{z_0 - x_0}{2}$$

且　$\frac{z_0 + x}{2}$与$\frac{z_0 - x}{2}$互素，

故存在自然数u, v，使得

$$\frac{z_0 + x_0}{2} = u^2, \frac{z_0 - x_0}{2} = v^2$$

于是$\frac{y_0}{2} = uv$，从而得式(2)，且显然$u > v$。

由$\frac{z_0 + x}{2}$与$\frac{z_0 - x}{2}$互素得u、v互素；由$u^2 + v^2 = z_0$是奇数得u, v有不同的奇偶性。证毕。

题 243　基于上述定理。

题 244 是等式$3^2 + 4^2 = 5^2$的引伸：

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

……

题 245，246 为定理 1 之应用。

费尔马由方程(1)得到启发，考虑方程

$$x^n + y^n = z^n \tag{4}$$

的自然数解。他认为方程(4)当 $n \geqslant 3$ 时无自然数解，此即熟知的费尔马大定理。这个定理直到最近才利用相当高深的数学方法给予证明。对方程(4)在特殊条件下的无解性，可作为各种各样的竞赛试题。

题 247—251 即考虑特殊条件下的方程(4)的无解性。

【解答】

(243) 因 u、v 有不同的奇偶性，故 $2uvd$ 必能被 4 整除。当 u、v 至少一个能被 3 整除时，$2uvd$ 能被 3 整除；当 u、v 均不能被 3 整除时，$u^2 - v^2$ 必能被 3 整除。由定理 1，xy 必能被 3 整除，从而 xy 必能被 12 整除。

(244) 能。因为

$$(2k^2+k)^2 + (2k^2+k+1)^2 + \cdots + (2k^2+2k)^2$$
$$= (2k^2+2k+1)^2 + \cdots + (2k^2+3k)^2$$

(245) 能。对一切不全为零的整数 u、v，点

$$p(u,v) = \left(\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}, \frac{2uv}{u^2+v^2}\right)$$

是单位圆周上的点，取 u、v 具有形式

$$u = a^2 - 1, \quad v = 2a \quad (1 \leqslant a \leqslant 1975)$$

当 a 是不同的正整数时，对应点 $P(u,v)$ 不同，且若

$$x = b^2 - 1, y = 2b$$

则点 $P(u,v)$ 与 $P(x,y)$ 的距离

$$d = \frac{|a-b|(ab+1)}{(a+1)(b+1)}$$

是有理数。

(246) 由已知条件 $\cos\theta = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$，又

$$
\begin{aligned}
A_n &= (a^2 + b^2)^n I_m(\cos n\theta + i\sin n\theta) \\
&= (a^2 + b^2)^n I_m(\cos\theta + i\sin\theta)^n \\
&= (a^2 + b^2)^n \sum_{j=0} C_n^{2j+1}(-1)^j \\
&\quad (\sin\theta)^{2j+1}(\cos\theta)^{n-2j-1} \\
&= \sum C_n^{2j+1}(-1)^j(2ab)^{2j+1}(a^2 - b^2)^{n-2j-1}
\end{aligned}
$$

故 A_n 是整数。

(247) 由 $x^3 + 11^3 = y^3$ 得 $y^3 - x^3 = 11^3$， 即 $(y - x)(y^2 + yx + x^2) = 11^3$，因 $x^2 + xy + y^2 \geqslant 3$，故

$y - x = 1, 11$ 或 11^2

把 $y = x + 1, x + 11, x + 11^2$ 分别代入原方程，得到关于 x 的二次方程无整数解。矛盾。

(248) 若

$$(n - 1)^3 + n^3 = (n + 1)^3$$

则 $n^3 = 6n^2 + 2$。当 $n \geqslant 7$ 时，$n^3 > n^2 + 2$；当 $n = 2,3,4,5,6$ 时，$n^3 \neq 6n^2 + 2$，得证。

(249) 若 $x + y = p$ 是素数，则 $z^n = x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + y^{n-1})$ 能被 p 整除，从而 $z \geqslant p$。由此得

$$p^n \leqslant z^n = x^n + y^n < (x + y)^n = p^n$$

矛盾。

(250) 当 $k = 1,2$ 时，结论显然成立。

当 $k \geqslant 3$ 时，显然 $x \neq y$，不妨设 $x < y$，则 $z \geqslant y + 1$，故

$$(y + 1)^k \leqslant z^k = x^k + y^k \leqslant (y - 1)^k + y^k$$

即

$$2(ky^{k-1} + C_k^3 y^{k-3} + \cdots) \leqslant y^k$$

得

$$2ky^{k-1} \leqslant y^k$$

从而 $$y \geqslant 2k > k$$

矛盾。

(251) 当 $y \geqslant 2$ 时，如题 248，方程无解。

当 $y = 1$ 时，由 $x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$，得 $x = 3$，故给定方程的唯一解是 $x = 3, y = 1$。

十六 张冠李戴的方程怀一窝金蛋

【试题】

题 252 设 $28n^2+1$ 是完全平方数，则 $2+2\sqrt{28n^2+1}$ 也是完全平方数。（匈牙利，1974）

题 253 求证：存在无限多对正整数 k、n，使得

$$1+2+3+\cdots+k=(k+1)+(k+2)+\cdots+n$$

（IMO 备选题，26 届）

题 254 可以证明：存在无穷多个自然数，使平均值 $\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}$ 为完全平方数，头一个这种自然数是 $n=1$。试求下面的两个这种自然数 n。（IMO 备选题，31 届）

题 255 设 $a_n=[\sqrt{(n-1)^2+n^2}]$ $(n=1,2,\cdots)$，其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分。证明：

(i) 有无限多个正整数 m，使得

$$a_{m+1}-a_m>1$$

(ii) 有无限多个正整数 m，使得

$$a_{m+1}-a_m=1$$

（IMO 备选题，29 届）

题 256 确定 m^2+n^2 的最大值，这里 m 和 n 都是整数，

且 $m、n \in \{1,2,\cdots,1981\}$，$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$。

（IMO，22 届）

题 257 证明：数列 $\{a_n\}$ 含无穷多个完全平方数，其中 $a_n = [n\sqrt{2}]$。（IMO 备选题，30 届）

题 258 设 $x_0 = 1, x_1 = 1, y_0 = 1, y_1 = 2, x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}, y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$。求证：对一切整数 $n \geqslant 0$，$y_n^2 = 3x_n^2 + 1$。（加拿大，1988）

题 259 一个整数数列定义如下：$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n > 1)$。证明：当且仅当 2^k 整除 n 时，2^k 整除 a_n。（IMO 备选题，29 届）

【背景】

1657 年，法国数学家费尔马向英国数学家挑战时，提出问题：求不定方程

$$x^2 - Dy^2 = A \tag{1}$$

的正整数解，其中 D 是非完全平方数。

佩尔(J. Pell，1610 — 1685) 在一本书的附录中，介绍了瓦里斯(Wallis，1616 — 1703) 对这个方程的研究结果。此后，欧拉误将此方程称为佩尔方程。300 多年过去了，数学界以讹传讹，至今仍把方程(1) 称为佩尔方程。

定理 1 若 D 是正的非完全平方数，则方程

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{2}$$

有无限多组正整数解。设 (x_1, y_1) 是方程(2) 的使 x_1 达到最小(从而 y_1 也达到最小) 的正整数解(称为最小解)，则方程(2) 的全部正整数解可表示为

$$x_n + \sqrt{D} y_n = (x_1 + \sqrt{D} y_1)^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

即

$$x_n = \frac{(x_1 + \sqrt{D} y_1)^n + (x_1 - \sqrt{D} y_1)^n}{2}$$

$$y_n = \frac{(x_1 + \sqrt{D} y_1)^n - (x_1 - \sqrt{D} y_1)^n}{2\sqrt{D}}$$

定理2 若D是正的非完全平方数，则方程(1)或者没有正整数解，或者有无限多组正整数解。而且，若(x_1, y_1)是方程(2)的最小解，(α_0, β_0)是方程(1)的使$\alpha_0 \leqslant x_1$的一切可能的非负整数解(称为基本特解)，则方程(1)的全部正整数解(α_n, β_n)可表示为

$$\alpha_n + \sqrt{D}\beta_n = (\alpha_0 + \sqrt{D}\beta_0)(x_1 + \sqrt{D} y_1)^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

也就是

$$\alpha_n = \frac{(\alpha_0 + \sqrt{D}\beta_0)(x_1 + \sqrt{D} y_1)^n + (\alpha_0 - \sqrt{D}\beta_0)(x_1 - \sqrt{D} y_1)^n}{2}$$

$$\beta_n = \frac{(\alpha_0 + \sqrt{D}\beta_0)(x_1 + \sqrt{D} y_1)^n - (\alpha_0 - \sqrt{D}\beta_0)(x_1 - \sqrt{D} y_1)^n}{2\sqrt{D}}$$

关于佩尔方程及有关定理可参见初等数论书。

佩尔方程有不少有趣的性质，它们以不同的形式出现于各种竞赛试题中。本节的问题均与此方程有密切联系。

【解答】

(252) 设$28n^2 + 1 = m^2$，则$m^2 - 28n^2 = 1$。这一佩尔方程的最小解是$m_1 = 127, n_1 = 24$，故

$$m = \frac{(127 + 24\sqrt{28})^k + (127 - 24\sqrt{28})^k}{2}$$

从而

$$
\begin{aligned}
&2+2\sqrt{28n^2+1}\\
&=2+2m\\
&=2+(127+24\sqrt{28})^k+(127-24\sqrt{48})^k\\
&=(8+3\sqrt{7})^{2k}+2+(8-3\sqrt{7})^{2k}\\
&=[(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k]^2
\end{aligned}
$$

由牛顿二项式定理，$(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k$ 是整数，得证。

(253) 由等差级数求和公式，得 $2(n+1)^2-2(2k+1)^2=-1$。因为方程 $x^2-2y^2=-1$ 的最小特解是 $\alpha_0=1$，$\beta_0=1$，方程 $x^2-2y^2=1$ 的最小解是 $x_1=3$，$y_1=2$，故方程 $x^2-2y^2=-1$ 的正整数解是

$$
\begin{aligned}
\alpha&=\frac{(1+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^m+(1-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^m}{2}\\
&=\frac{(1+\sqrt{2})^{2m+1}+(1-\sqrt{2})^{2m+1}}{2}\\
\beta&=\frac{(1+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^m-(1-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^m}{2\sqrt{2}}\\
&=\frac{(1+\sqrt{2})^{2m+1}-(1-\sqrt{2})^{2m+1}}{2\sqrt{2}}\\
&\qquad (m=1,2,3,\cdots)
\end{aligned}
$$

由 $\alpha^2-2\beta^2=-1$ 得 α 是奇数，故 $2\beta^2=\alpha^2+1\equiv 2\pmod 8$ 即 $\beta^2\equiv 1\pmod 4$，从而 β 是奇数。取

$$
n=\frac{\alpha-1}{2},\quad k=\frac{\beta-1}{2},
$$

得存在无限多对(k,n)，使得给定方程成立。

(254) 设 $\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}=m^2$，则 $(n+1)(2n+1)=$

$6m^2$，即$(4n+3)^2-3(4m)^2=1$。因为方程$x^2-3y^2=1$的最小解是$x_1=2$，$y_1=1$，所以它的正整数解是

$$x=\frac{(2+\sqrt{3})^k+(2-\sqrt{3})^k}{2}$$

$$y=\frac{(2+\sqrt{3})^k-(2-\sqrt{3})^k}{2\sqrt{3}}\qquad(k=1,2,3,\cdots)$$

使$x=4n+3\equiv3\ (\mathrm{mod}4)$，$y=4m\equiv0\ (\mathrm{mod}4)$，由牛顿二项式定理，当且仅当$k\equiv2(\mathrm{mod}4)$，即$k=4t-2$（$t$为正整数）。从而

$$n=\frac{x-3}{4}=\frac{(2+\sqrt{3})^{4t-2}+(2-\sqrt{3})^{4t-2}-6}{8}$$

当$t=1,2,3$时，分别得$n=1,337$与65521，故$337,65521$即为所求的两数。

(255) 设$f(n)=\sqrt{(n-1)^2+n^2}$，则

$$f(n+1)-(n)$$

$$=\frac{4n}{\sqrt{2n^2+2n+1}+\sqrt{2n^2-2n+1}}$$

故

$$f(n+1)-f(n)<\frac{4n}{\sqrt{2}(n+\frac{1}{2})+\sqrt{2}(n-\frac{1}{2})}$$

$$<\sqrt{2}<2$$

$$f(n+1)-f(n)>\frac{4n}{\sqrt{2}(n+\frac{\sqrt{2}}{2})+\sqrt{2}n}>1$$

即 $\quad 1<f(n+1)-f(n)<2\quad(n=1,2,3,\cdots)\qquad(3)$

从而 $\quad a_{n+1}-a_n=1$或2。令

$$t=\frac{(1+\sqrt{2})^{2k+1}+(1-\sqrt{2})^{2k+1}}{2}$$

$$r=\frac{(1+\sqrt{2})^{2k+1}-(1-\sqrt{2})^{2k+1}}{2\sqrt{2}}$$

则 $t^2-2r^2=-1$，显然 t 为奇数，令 $m=\frac{t-1}{2}$，则 $(m-1)^2+m^2=r^2$，即 $f(m)=a_m=r$ 是整数。由式(3)，得

$$r+1<f(m+1)<r+2$$

$$r-2<f(m-1)<r-1$$

从而 $a_{m+1}=[f(m+1)]=r+1$，$a_{m-1}=[f(m-1)]=r-2$，即

$$a_{m+1}-a_m=1,\quad a_m-a_{m-1}=2>1。$$

(256) 方程 $x^2-5y^2=1$ 的最小解是(9,4)，方程 $x^2-5y^2=4$ 的基本特解是(2,0)，(3,1)，(7,3)，故方程 $x^2-5y^2=4$ 的正整数解是

$$x+y\sqrt{5}=2(9+4\sqrt{5})^k$$

$$x+y\sqrt{5}=(3+\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^k$$

或 $$x+y\sqrt{5}=(7+3\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^k$$

即 $(x,y)=(3,1)$，$(7,3)$，$(18,8)$，$(47,21)$，$(123,55)$，$(322,144)$，$(843,377)$，$(2207,987)$，$(5778,2584)$，…

由 $(n^2-mn-m^2)^2=1$，得 $n^2-mn-m^2=\pm 1$，即 $(2n-m)^2-5m^2=4$ 或 $(2m+n)^2-5n^2=4$，故

$$\begin{cases}2n-m=x\\ m=y\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}2m+n=x\\ n=y\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}m=y\\ n=\dfrac{x+y}{2}\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}m=\dfrac{x-y}{2}\\ n=y\end{cases}$$

欲 m、n 尽可能大，必须且只须 x、y 尽可能大。又 m、$n\leqslant 1981$，故只须考虑

$$\begin{cases} m = 987 \\ n = \dfrac{2207 + 987}{2} = 1957 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} m = 610 \\ n = 987 \end{cases}$$

显然,最大值是 $m^2 + n^2 = 987^2 + 1597^2 = 3524578$。

(257) 取

$$n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^{2k} - (3 - 2\sqrt{2})^{2k}}{2\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^{2k} + (3 - 2\sqrt{2})^{2k}}{2}$$

$$(k = 1, 2, 3, \cdots)$$

则 $x^2 - 2n^2 = 1$,x、n 都是正整数,故

$$a_n = [n\sqrt{2}] = [\sqrt{2n^2}] = [\sqrt{x^2 - 1}] = x - 1$$

$$= \left(\frac{(3 + 2\sqrt{2})^k - (3 - 2\sqrt{2})^k}{\sqrt{2}}\right)^2$$

因为 $\dfrac{(3 + 2\sqrt{2})^k - (3 - 2\sqrt{2})^k}{\sqrt{2}}$

是整数,故 a_n 为完全平方数。证毕。

(258) 因 $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$ 及 $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$ 的特征方程都是 $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$

它的两根即特征根是 $2 + \sqrt{3}$ 与 $2 - \sqrt{3}$,

所以

$$x_n = a_1(2 + \sqrt{3})^n + b_1(2 - \sqrt{3})^n,$$

$$y_n = a_2(2 + \sqrt{3})^n + b_2(2 - \sqrt{3})^n$$

由 $x_0 = 0, x_1 = 1; y_0 = 1, y_1 = 2$,得

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 0 \\ (2 + \sqrt{3})a_1 + (2 - \sqrt{3})b_1 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 1 \\ (2+\sqrt{3})a_1 + (2-\sqrt{3})b_2 = 2, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \\ b_1 = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{2}, \\ b_2 = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$

得 $$x_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}$$

$$y_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}$$

故 $y_n^2 = 3x_n^2 + 1$。

(259) 如题 258，由 $a_0 = 0$，$a_1 = 1$

及 $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n > 1)$，得

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

令 $$b_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}$$

则 b_n 为整数，且 $b_n^2 - 2a_n^2 = (-1)^n$，故 b_n 为奇数，$a_{2n} = 2a_nb_n$。从而当 $n = 2^k(2l+1)$（k，l 为非负整数时），

$$a_n = 2^k a_{2l+1} b_{2l+1} b_{2(2l+1)} \cdots b_{2^{k-1}(2l+1)}$$

因 b_{2l+1}是奇数，故

$$a_{2l+1}^2 = \frac{b_{2l+1}^2 + 1}{2}$$

也是奇数，从而 a_{2l+1} 是奇数。故当且仅当 2^k 能整除 n 时，a_n 能被 2^k 整除。

十七 零星景观探微

【试题】

题 260 已知下面三角形数表中，每个 * 代表一个数（不一定相同），并且每一个数都等于它底下一行分处它两侧的相邻两数之和，则表中 15 个 * 所代表的数之倒数和为________。

（五羊杯，初中，三届）

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & * & & & & \\
 & & & * & & * & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & * & & * & & * & & \\
 & * & & * & & * & & * & & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{6} & & * & & * & & * & & * & & *
\end{array}
$$

题 261 解方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a \\[2ex]
\dfrac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b
\end{cases}
$$

（全苏，13 届）

题 262 求多项式 $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ 被 $x - 1$ 除的余数。

（莫斯科，1947）

题 263 求以 x^2-x 除 $x+x^9+x^{25}+x^{49}+x^{81}$ 的余式。

（美国，1965）

题 264 多项式 $x^{12}-x^6+1$ 除以 x^2-1 的余式是______。

(A) 1 (B) -1 (C) $x-1$ (D) $x+1$

（全国初中，1993）

题 265 设 a,b,c 都是奇数，证明方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有有理数根。

（波兰，1959；成都，1963）

题 266 设多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的系数都是整数，并且有一个奇数 α 及一个偶数 β，使得 $f(\alpha)$ 及 $f(\beta)$ 都是奇数。求证：方程 $f(x)=0$ 没有整数根。

（上海，1956；莫斯科，1941）

题 267 证明：对于任何自然数 n，$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ 是完全平方数。

（莫斯科，1951）

题 268 求和 $1^3+2^3+3^3+\cdots+(2n-1)^3$。

（莫斯科，1935）

题 269 已知对任意的 $n\in N$，$a_n>0$，且

$$\sum_{j=1}^{n}a_j^3=\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)^2，求证：a_n=n。$$

（全国，1989）

题 270 考察下表

$$1=1$$
$$2+3+4=1+8$$
$$5+6+7+8+9=8+27$$
$$10+11+12+13+14+15+16=27+64$$

推测由此表所暗示的一般法则，用适当的数学式子表示它，并证明它。

（美国，1948）

题 271　考察下表

$$1 = 1$$
$$3 + 5 = 8$$
$$7 + 9 + 11 = 27$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125$$

猜测由此提供的一般法则，用适当的数学式子表示它，并加以证明。　　（美国，1954）

题 272　求方程 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6}$ 的正整数解。

（希望杯，1 届）

题 273　方程 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{7}$ 的整数解的个数是（　　）。

（A）1　（B）3　（C）5　（D）6　　（长春，1990）

题 274　设 x, y 是两个不同的正整数，且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{5}$，则 $x + y =$ ________。

（全国部分省市初中数学通讯赛，6 届）

题 275　判定 $\frac{7}{332}$ 与 $\frac{1949}{1992}$ 能否表示为 $\frac{1}{l} + \frac{1}{m}$ 的形式，其中 l 和 m 为自然数。若能表示，求出表示式；若不能表示，请给出证明。　　（浙江，初中，1993）

题 276　当 4444^{4444} 写成十进制数时，它的各位数字之和为 A，A 的各位数字和为 B，求 B 的各位数字和（A 与 B 都写成十进制数）。　　（IMO，17 届）

题 277　数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1 = 1989^{1989}$，a_n 为 a_{n-1} 的各位数字和（$n > 1$），求 a_5。　　（加拿大，1989）

题 278 有一个三位数$\overline{abc}$，从它得到另一个三位数$\overline{cba}$。由这两个数中大的数减去小的数，得到$\overline{a_1b_1c_1}$（允许 $a_1 = 0$）。对于数$\overline{a_1b_1c_1}$再按上法得$\overline{a_2b_2c_2}$，依此下去。证明：在某一步，我们得到的数或是 495，或是 0。 （莫斯科，1961）

题 279 求证：对任何整数$n \geqslant 3$，存在奇数x，y，使得$7x^2 + y^2 = 2^n$。 （莫斯科，1985）

题 280 数列$\{a_n\}$满足$a_1 = a_2 = 1$，$a_n = (a_{n-1}^2 + 2)/a_{n-2}$ $(n \geqslant 3)$。求证：数列的所有项都是整数。

（莫斯科，1963）

题 281 整数数列$\{a_n\}$定义如下：$a_1 = 2$，$a_2 = 7$，$-\frac{1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leqslant \frac{1}{2}$ $(n \geqslant 2)$。求证：对所有$n > 1$，a_n是奇数。

（IMO 备选题，29 届）

题 282 设$x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1} = 1$ $(n \geqslant 1)$，$x_n \neq 0$ $(n \geqslant 0)$。求证：存在常数a，使得$x_{n+1} = ax_n - x_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$。

（普特南，54 届）

题 283 数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$定义如下：

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - a_n^2}}$$

$$b_0 = 1,\quad b_{n+1} = \frac{1}{b_n}(\sqrt{1 + b_n^2} - 1),\ (n = 0,1,2,\cdots)$$

求证：对于每个$n(\geqslant 0)$，

$2^{n+2}a_n < \pi < 2^{n+2}b_n$。 （IMO 备选题，30 届）

题 284 证明：若$\{a_n\}$是两两互异的自然数组成的无穷序列，并且这些自然数的十进制表达式不含数字零，则$\sum \frac{1}{a_n}$

<29。（波兰，1971）

题 285 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相同的正整数，每个 a_i 的十进制表示中数字 9 不出现。证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leqslant 30$。

（IMO 备选题，30 届）

题 286 设 $-1<x<1$，求证：

$$\sum_{k=0}^{6}\frac{1-x^2}{1-2x\cos\frac{2k\pi}{7}+x^2}=\frac{7(1+x^7)}{1-x^7}$$

并导出等式

$$\csc^2\frac{\pi}{7}+\csc^2\frac{2\pi}{7}+\csc^2\frac{3\pi}{7}=8$$

题 287 n 个平面能够将空间分成多少部分？

（莫斯科，1938）

题 288 五边形 $ABCDE$ 中，$AB=BC=CD=DE$，$\angle B=\angle D=90°$。证明：用这样相同的五边形能够铺满平面（彼此不重叠也不相离）。（莫斯科，1960）

题 289 证明：由六个边长不同的正方形不能拼成一个矩形。（莫斯科，1945）

题 290 设 C_1,C_2 是给定的两个圆，它们不相交，且一个在另一个的外部。由一点 P 作它们的切线 PT_1,PT_2，使 $PT_1=PT_2$。求点 P 的轨迹。（北京，1956）

题 291 圆 O_1,O_2 相切于点 A；过 A 的直线 l 分别交圆 O_1,O_2 于 C_1,C_2；过点 C_1,C_2 的圆 O 分别交圆 O_1,O_2 于 B_1,B_2；n 为 $\triangle AB_1B_2$ 的外接圆；圆 k 与 n 相切于 A，且分别交圆 O_1,O_2 于 D_1,D_2。证明：(1) 点 C_1,C_2,D_1,D_2 共圆或共线；(2) 当且仅当 AC_1,AC_2 为圆 O_1,O_2 的直径时，B_1,B_2,D_1,D_2 共圆。

（IMO 备选题，30 届）

题 292　在边长为 1 的闭正方形上任给三点，则必有两点，它们之间的距离不大于 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$。　（普特南，21 届）

题 293　在边长为 1 的正方形内任取五点，则必有两点，它们之间的距离不大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。用更小的数代替 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，命题还成立吗？　（普特南，14 届；四川少年百科知识竞赛，1985）

题 294　以任意方式给平面上每一点染上黑色或白色。求证：一定存在一个边长为 1 或 $\sqrt{3}$ 的正三角形，它的三个顶点是同色的。　（冬令营，1986）

题 295　平面上每一点均染上三种颜色之一，则必存在两点，距离为 1，且染同色。若把三改成九，情况如何？

（普特南，49 届）

题 296　平面上每一点都以红、绿二色之一染。证明：存在这样的两个相似三角形，它们的相似比为 1995，并且每个三角形的三个顶点同色。　（全国联赛，1995）

【背景】

题 260 中的三角数阵称为莱不尼兹（Leibnitz，1646 — 1716）调和三角形，其定义如下：第 n 行有 n 个数，第一个数 $a_{n1}=\frac{1}{n}$；当 $1\leqslant j\leqslant i$ 时，$a_{ij}=a_{i+1,j}+a_{i+1,j+1}$。

可以证明：

(1) $a_{nk}=\frac{1}{kC_n^k}$　$(1\leqslant k\leqslant n)$

(2) $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}a_{n,k+1}=a_{kk}=\frac{1}{k}$

题 261 来自爱因斯坦（Einstein，1879 — 1955）相对论中

的洛伦兹(A·Lorentz,1853 — 1928)变换：设 $v = v(x,y)$，$|v| < 1$，

$$x' = \frac{x - vy}{\sqrt{1 - v^2}},\ y' = \frac{y - vx}{\sqrt{1 - v^2}}$$

则 $$(x')^2 - (y')^2 = x^2 - y^2。$$

题 262 — 264 与贝佐特(E. Bezout,1730 — 1783)定理及其方法有关。

定理 1(贝佐特) $x - a$ 除以多项式 $p(x)$ 的余数是 $p(a)$。

题 265 — 266 是哥德巴赫一个定理的推广。

定理 2(哥德巴赫) 整系数多项式 $p(x)$ 当 $x = 0,1$ 时的值为奇数，则方程 $p(x) = 0$ 没有整数根。

求前 n 个自然数的 k 次幂之和 $s(n,k)$，早在 18 世纪初，雅可比·贝努里(Jacob Bernoulli,1654 — 1705)就进行了全面研究(见本丛书《数学宫趣游》)。题 267 — 271 与它有关。题 270 — 271 都是富有启发性的问题。

把分数表示成单位分数(即分子为 1 的分数)之和，古埃及人早有过深入的研究，题 272 — 275 与之有关。

判断一个整数(用十进制表示)能否被 9 整除，有一个很方便的方法，即看它的数字之和能否被 9 整除。更一般的有如下定理。

定理 3 一个整数被 9 除的余数与它的数字和被 9 除的余数相等。

题 276，277 与此定理有关。

对于某一正整数集合 S 的任一元素 a_1，依一定规则得到正整数 $a_2 \in S$；对 a_2 依同样规则，得到数 $a_3 \in S$；……。这样得

到的数列$\{a_n\}$是否一定有一项取到某一个与a_1无关的定值k?

由这个问题产生了数学中的所谓“黑洞理论”。

题 278　是这一理论的一个问题。

题 279　即欧拉问题。

题 280 － 282 与如下定理有关:

定理 4　数列$\{a_n\}$满足$a_{n-1}a_{n+1}-a_n^2=C$(常数),$a_n\neq 0$ $(n=0,1,2,\cdots)$,则存在常数d,使得$a_{n+1}=da_n-a_{n-1}$　$(n=1,2,\cdots)$。

题 283 的实质是利用刘徽割圆术方法求圆周率的近似值。

熟知:自然数的倒数和是发散的,即$\sum\frac{1}{n}=+\infty$。但是,可以证明:十进制表示不取某一数字k的自然数a_n的倒数和收敛,即存在常数C_k。使得$\sum\frac{1}{a_n}=C_k$。题 284,285 即估计C_0,C_9。

题 286　源于如下分解式:设$w=\cos\frac{2\pi}{\pi}+i\sin\frac{\pi}{2}$,则

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{w^k}{x-w^k}=\frac{n}{x^n-1}$$

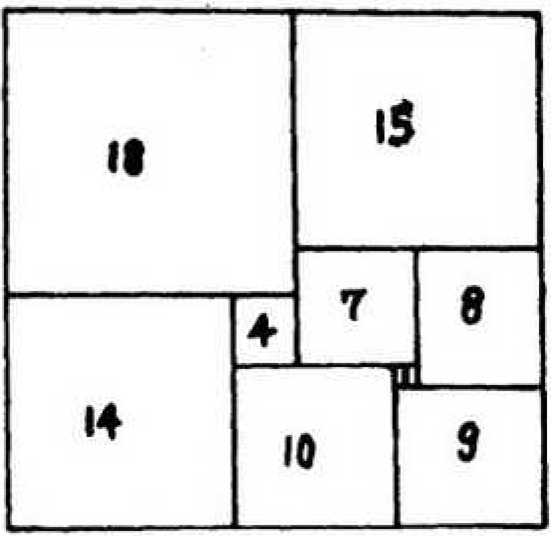
题 287 为斯坦纳问题:

定理 5　n点至多可把直线分成$n+1$段。n条直线至多可把平面分成$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$部分。n个平面至多可把空间分成$\frac{1}{6}(n+1)(n^2-n+6)$部分。

题 288 为所谓的“铺砌问题”:求多边形P,使得能用一些

相同的多边形 P 铺满平面。显然，P 可以是任意的三角形或四边形，也可以是正六边形，但不能是正五边形。那么，首先要考虑的是：P 可取怎样的五边形？对此问题，美国一家庭妇女玛乔莉·赖斯(Marjorie Rice，1923 —)在她的锅台上做了彻底研究。她找到了 58 种这样的五边形。

题 289 也是源于一个著名的问题：最少用多少个边长不同的正方形可以拼成一个矩形，甚而正方形？由题 289 得最小值 ≥ 7，由(图 18)得最小值 ≤ 9。(芜湖，1980)。



(图 18)

题 290 中 P 的轨迹称为圆 C_1 与 C_2 的根轴，是一条直线。

题 291 为反演理论问题。

题 292 — 293 源于如下问题：求最小正数 d_n，使得在边长为 1 的闭正方形上任取 $n(\geq 2)$ 点，必有两点距离 $\leq d_n$。

显然 $d_2=\sqrt{2}$。现在已经得出 $d_3=\sqrt{6}-\sqrt{2}$（题 292），$d_4=1$，$d_5=\frac{\sqrt{2}}{2}$（题 293），Graham 证明 $d_6=\frac{\sqrt{13}}{6}$，Schaer 与 Meir 证明 $d_7=2(2-\sqrt{3})$，$d_8=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$，$d_9=\frac{1}{2}$。一般 d_n 的确定是一个很难的未解决的问题。

题 294 — 293 是平面的点染色问题，艾道斯 1973 年证明了下述定理：

定理 6　平面上的点用两种颜色染，如无边长为 d 的同色正三角形，则必有任何边长为 $d'(\neq d)$ 的同色正三角形。

另一个问题是：求最大整数 r，使得平面的点用 r 种颜色染，一定存在距离为 1 的两点染同色。题 295 表明 $3\leqslant r\leqslant 8$。现已证明 $3\leqslant r\leqslant 6$。r 的确定是一个尚未解决的问题。

【解答】

(260) 300

(261) $x=\frac{a+b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}$，$y=\frac{b+a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}$

(262) 6

(263) $5x$

(264) 选 A

(265) 方程的有理数根 $\frac{q}{p}$（$(p,q)=1$），因 a 为奇数，得 p 为奇数，因 c 为奇数，得 q 为奇数。故 $aq^2+bpq+cp^2$ 为奇数，不为零，矛盾。

(266) 若 x 为奇数，则 $f(x)\equiv f(\alpha)\pmod 2$，$x$ 为偶数，则 $f(x)\equiv f(\beta)\pmod 2$，故 $f(x)$ 对任何整数 x 为奇数，不为

零。

(267) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(268) $n^2(2n^2 - 1)$

(269) 利用数学归纳法证明。

(270) $(n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \cdots + (n+1)^2 = n^3 + (n+1)^3$

(271) $(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \cdots + (n^2 + n - 1) = n^3$

(272) 不妨设 $x \geqslant y \geqslant z$,则$\frac{1}{z} \geqslant \frac{5}{6} \times \frac{1}{3}$,即 $z \leqslant 3.6$,故 $z = 2$ 或 3。

当 $z = 2$ 时,$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$,得 $x = 3 + \frac{9}{y-3}$,
由 $y - 3 = 1$,得 $y = 4, x = 12$;由 $y - 3 = 3$,得 $y = 6, x = 6$;

当 $z = 3$ 时,$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$,得 $x = 2 + \frac{4}{y-2}$,
由 $y - 2 = 1$,得 $y = 3, x = 6$;由 $y - 2 = 2$,得 $y = 4, x = 4$;
故得$\{x,y,z\} = \{2,4,12\},\{2,6,6\},\{3,3,6\}$或$\{3,4,4\}$。

(273) 选(C)　$(\frac{1}{7} = \frac{1}{56} + \frac{1}{8} = \frac{1}{-42} + \frac{1}{6} = \frac{1}{14} + \frac{1}{14})$

(274) 18　$(x = 3, y = 15$ 或 $x = 15, y = 3)$

(275) $\frac{7}{332} = \frac{1}{48} + \frac{1}{3984}$。$\frac{1949}{1990}$ 不能表示,因为$\frac{2}{3} < \frac{1949}{1992}$,故若能表示,必有一项为$\frac{1}{2}$,但$\frac{1949}{1992} - \frac{1}{2} = \frac{953}{1992} > \frac{1}{3}$,即另一项也为$\frac{1}{2}$,矛盾。

(276) $4444^{4444} \equiv (-2)^{4444} \equiv 2^{4444} \equiv 8^{1481} \cdot 2 \equiv -2 = 7 \pmod 9$。因 4444^{4444} 不超过 $4 \times 4444 = 17776$ 位，故 $A < 9 \times 17776 = 159984$，$B < 46$，$B$ 的各数字之和 < 13，从而 B 的各数字之和为 7。

(277) $a_5 = 9$，方法同上。

(278) $\overline{a_1b_1c_1} = 99k \ (k = 0,1,2,\cdots,9)$，分情况讨论。

(279) 当 $n = 3$，$x = y = 1$ 时，等式成立；若 $7x^2 + y^2 = 2^k$，且 x、y 为奇数，令

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(x+y) \\ y' = \dfrac{1}{2}(7x-y) \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(x-y) \\ y' = \dfrac{1}{2}(7x+y) \end{cases}$$

则至少有一组 x'，y' 是奇数，且 $7(x')^2 + (y')^2 = 2^{k+1}$。

(280) 先证定理 4。

由 $a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = C$，　$a_na_{n+2} - a_{n+1}^2 = C$，得

$$a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = a_na_{n+2} - a_{n+1}^2$$

又 $a_n \neq 0$，故

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n-1} + a_n}{a_n}$$

即数列$\{\dfrac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}}\}$是常数列。

令 $d = \dfrac{a_0 + a_2}{a_1} = \dfrac{a_0^2 + a_1^2 + c}{a_0a_1}$，则

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_n} = d$$

即存在常数 d，使

$$a_{n+1} = da_n - a_{n-1} \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

对本题，显然所有 $a_n \neq 0$，$d = 4$，故

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n,$$

再由 a_1，a_2 为整数，得 a_n 为整数。

(281) 先证 $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$。

(282) 见题 280。

(283) 归纳证明：$a_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$，$b_n = \mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}$，由

$$\sin < \theta < \mathrm{tg}\theta \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

得证。

(284) 不含数字零的 k 位自然数有 9^k 个，它们的倒数之和小于

$$(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9}) \cdot (\frac{9}{10})^{k-1}$$

故

$$\begin{aligned}\sum \frac{1}{a_i} &< (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9}) \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{9}{10})^{k-1} \\ &= 10(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9}) \\ &= 28.289681\cdots < 29\end{aligned}$$

(285) 类似上题。

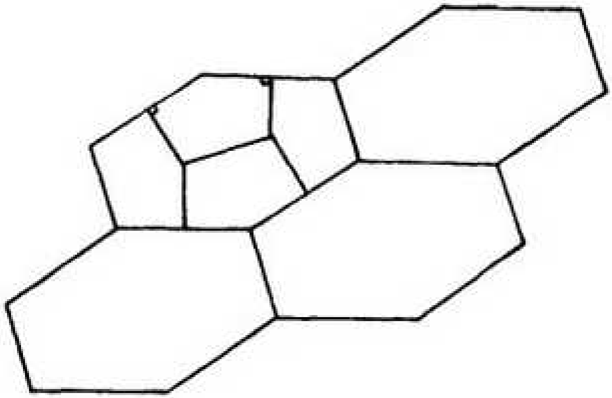
(286) 见背景

(287) 见背景

(288) 见(图 19)

(289) 矩形的四顶点分属四个正方形，剩余部分为 L 形，若由两个正方形拼成，必有两个正方形边长相同，矛盾。

(290) 可用纯几何方法，也可用坐标法求。点 P 的轨迹是过两圆连心线上一定点 Q，且垂直于连心线的一直线 L，其中



（图 19）

Q 与圆 C_1、C_2 的圆心之距 d_1、d_2 分别是

$$d_1=\frac{d^2+r_1^2-r_2^2}{2d},\ d_2=\frac{d^2-r_1^2+r_2^2}{2d}$$

r_1、r_2、d 分别是圆 C_1、C_2 的半径及两圆的圆心距。

(291) 以点 A 为反演中心，研究图形的反演。

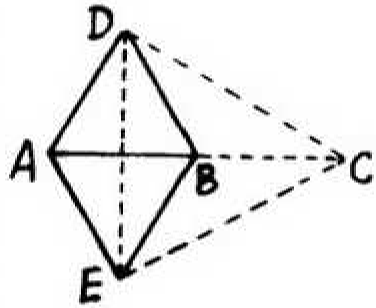
(292) 设 P、Q、S 是闭正方形 $ABCD$ 上的任意三点，若点 P 在正方形内部，则过点 P 作 QS 的垂线交正方形一边于点 P'（P' 与 P 在 QS 同侧），那么，$P'Q>PQ$，$P'S>PS$。由此可以找到顶点均在正方形边上的 $\triangle P'Q'S'$，其三边分别不小于 $\triangle PQS$ 的三边。如果 P'、Q'、S' 有两点在同一边上，得证，否则，设 P'、Q'、S' 分别在 AB、BC、CD 上，且 $AP'\leqslant DS'$，若 $P'S'$、$P'Q'$ 均大于 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$，则 $C'S'$、$C'Q'$ 均小于 $\sqrt{3}-1$，从而 $Q'S'<\sqrt{6}-\sqrt{2}$，得证。以正方形一顶点为一顶点的内接正三角形的边长为 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$。

(293) 把正方形分成边长为 $\frac{1}{2}$ 的四个小正方形中，至少

有两点在同一小正方形中，这两点的距离不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$。用更小数代替$\frac{\sqrt{2}}{2}$，命题不成立，因为五点分处正方形的四个顶点与中心处时，最小距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$。

(294) ① 所有点染同色时，命题得证。

② 不是所有点染同色时，必有距离等于 2 的两点 A 与 C 异色。设 AC 的中点 B 与 A 同色，那么，若以 AB 为一边的正三角形 ABD 与 ABE 之一为同色三角形，则得边长为 1 的同色正三角形，否则，CDE 为边长 $\sqrt{3}$ 之同色正三角形。(图 20)



(图 20)

(295) 否则，距离为 $\sqrt{3}$ 之两点必同色，得半径为 $\sqrt{3}$ 的圆上的点同色，故必有距离为 1 之两点同色。

把平面分成边长为 $a(\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2})$ 的正方格，对正方格适当染色(每格染一色)，可证得 3 改为 9，结论不成立。

(296) 任取一点 O 为圆心，作半径为 r、R 的两同心圆 C_1、C_2，在 C_1 上任取九点，由抽屉原理，必有五点同色。O 与这五点连线交 C_1 于五点，这五点有三点同色，此三点所成的三角形与 C_1 上相应三点所成的三角形为同色三角形，相似比为 $\frac{r}{R}$。取 $\frac{r}{R}=1995$ 得本题结论成立。